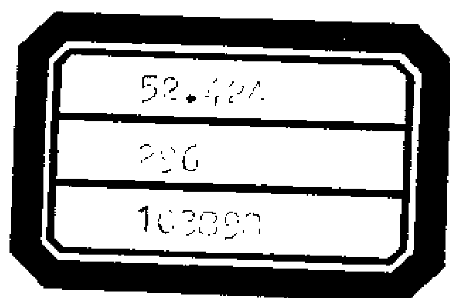
吕洪生 曾新吾 编著

连续介质力学

动载固体力学与应力波



国防科技大学出版社



连续介质力学

Continuum Mechanics

（下）

动载固体力学与应力波

Dynamical Solid Mechanics and Stress Waves

吕洪生　曾新吾　编著



国防科技大学出版社
长沙

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学. 下册,动载固体力学与应力波/吕洪生,曾新吾编著. —长沙:国防科技大学出版社,1999.10

. ISBN 7-81024-593-7

Ⅰ. 连… Ⅱ. ①吕…②曾… Ⅲ. ①连续介质力学②动载荷-固体力学③应力波 Ⅳ. O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 47857 号

内容简介

本书是《连续介质力学》下册,介绍动载(爆炸、冲击)作用下固体的动态弹塑性的应变分析、本构关系以及粘弹等力学行为,并介绍了固体材料在强脉冲载荷作用下的响应的分析手段——应力波理论、流体弹塑性理论与数值计算、有限元法初步等。本书适合于爆炸物理、爆炸力学、爆炸加工、一般力学等专业的本科生、研究生作教材,并可供相关专业科技人员参考。

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4555681　邮政编码:410073
E-mail: gfkdcbs@ public. cs. hn. cn
责任编辑:潘　生　责任校对:黄八一
新华书店总店北京发行所经销
长沙交通学院印刷厂印装
*
787×1092　1/16　印张:13　字数:300 千
1999 年 10 月第 1 版第 1 次印刷　印数:1000 册
*
定价:20.00 元

序　言

连续介质力学(Continuum Mechanics),从广义上讲,它是以连续介质假设为基础的众多力学学科的总称,例如流体力学、水利力学、气体动力学、弹性力学、塑性力学、爆炸力学等均属于连续介质力学的范畴。它是一般的力学专业、工程力学专业、爆炸力学专业等最重要的共同基础或专业内容。

连续介质力学是经典理论力学的发展。作为力学,它当然是研究连续介质的宏观性状的,即研究物质的宏观机械运动,而不管物质的真实微观结构,尽管物质是由大量的分子组成。因此,连续介质不对物质的真实微观结构作任何探讨,但与物质结构理论并不矛盾,而是相辅相成的。物质结构理论研究的是物质微观情况,即研究物质的特殊结构,而连续介质力学则研究具有不同微观结构物质的共同性状。

连续介质力学的主要目的在于建立各种物质的力学模型,并给出各种物质的本构关系的数学表达式,同时在给定的初始条件和边界条件下求出问题的解。概括起来,它涉及如下基本内容:①变形几何学。研究连续介质变形的几何性质,确定变形所引起物质各部分空间位置和方向的变化,以及各邻近点相互距离的变化,即研究诸如运动、变形、变形梯度、变形张量等。②运动学。主要研究连续介质力学中各种物理量随时间的变化率,这包括速度梯度、变形速率、旋转速率等。③基本方程。根据适用于所有物质的守恒定律建立的方程,例如对于热力连续介质力学建立有连续性方程、运动方程、能量方程、熵不等式等。④本构关系。⑤特殊理论。例如弹性理论、塑性理论、流体与气体动力学、粘性流体理论等。⑥问题的求解。

连续介质力学分为经典连续介质力学(Classical Continuum Mechanics)和近代连续介质力学(Modern Continuum Mechanics)。

1. 经典连续介质力学。它侧重研究两种典型的理想介质,即线弹性物质和线粘性物质。这两种物质模型能够很好地描述在工程技术上所处理的很多介质的特性,因此经典连续介质理论至今仍被广泛应用并将继续发挥解决实际问题的能力。

2. 近代连续介质力学。它是在二次大战以后发展起来的,它是经典连续介质力学的发展和扩充,具体表现在:①物体不必只看作是质点的集合;它可能是由具有微结构的质点集合体。②运动不必总是光滑的,运动有激波、扩散等。③物体不必只受力的作用,它也可承受体力偶、力偶应力,以及电磁场所引起的效应等。④对本构关系进行更加概括的研究。⑤重点研究非线性问题。

近年来,近代连续介质力学在其深度和广度上都取得了很大进展,并出现了下述三个方向:①按照理性力学(Rational Mechanics)的观点和方法研究连续介质理论,从而发展成理性连续介质力学。②把近代连续介质力学和电子计算机结合起来,从而发展成为计算连续介质力学。③把近代连续介质力学的研究对象扩大,从而发展成为连续系统物理学(Continuum Physics)。

然而,本书“别具一格”、“与众不同”,它既非“经典”,又非“近代”。它介于经典与近代之间,它也不同于现已出版的众多的《连续介质力学》,这些书都是针对具有流体力学和固

体力学基础的读者的高级概论。本书主要是针对爆炸力学和爆炸物理专业的本科生和研究生的，它系统地给出：连续介质力学的数学基础、应力分析、运动与变形、基本物理规律、本构方程、不可压流体力学、气体动力学、爆轰学、爆炸作用、动载固体力学、应力波理论等。总之，它给出了该专业所需要的全部基础内容。所以从本书的结构体系和所述内容来看，它也不同业已出版的针对爆炸物理和爆体力学专业的力学著作。本书既考虑到该专业的已往基础，又考虑到该学科的最新发展，如增加了动载固体力学、应力波理论和不可压流体力学、本构方程等内容；同时结合大型专题介绍了力学中的三大计算方法（特征法计算、有限差分法和有限元法）。

本书除了适用于本专业的本科生和研究生之外，它还可作为爆炸作用、强冲击载荷、材料动载响应、爆炸加工以及一般的力学专业的本科生、研究生和有关的科技人员的教材或参考书。

本书分成三册，上册为《连续介质力学基础》，其内容包括：序言、张量基础、场论初步、应力分析、运动与流动、守恒规律和本构关系等；中册为《流体力学与爆炸力学》，内容包括：流体力学基本方程组、流体静力学、不可压流动、位势理论与射流、气体动力学方程、冲击波与特征线理论、量纲理论、波的相互作用与具体应用、体药与爆炸概论、爆轰波理论、爆轰产物的飞散与爆炸作用等；下册为《动载固体力学与应力波》，内容包括：应变分析、弹性、塑性、滑移线理论、粘弹、流体弹塑性理论与计算、有限元法、高压本构、应力波理论基础等。

本书是在作者为原电力部工程技术人员编著的《爆炸压接理论基础》的基础之上，以 G. E. Mase 的《Continuum Mechanics》为基本蓝图，并参照有关流体、固体与爆体等方面的专著，扩充改编而成。由于内容较广、跨度较大，全书约 120 万字；更兼写作匆忙、作者学识有限，所以本书作为初次尝试，难免有缺点与不足，望多指正。

作者　1999 年 9 月

目 录

序 言

第十二章 动载固体力学基础

第十三章 应力波理论基础

第十二章　动载固体力学基础

爆炸与冲击的直接作用对象不外乎两种——固体和流体(液体与气体)。对于气体与液体的作用,我们已经研究过了;对于固体的作用,有时忽略其剪切变形强度而把固体介质作为可压缩流体,有时又把它作为不可压缩流体或刚体(rigid body),如对爆炸驱动抛体的处理,这要视冲击强度和解决的问题而定。然而,由于实际物体是有强度的,所以研究动载冲击下具有变形强度的固体行为(behaviour),不但实际需要而且意义重大,它关系到爆炸与冲击下材料的变形、破坏的预测与防护问题的解决。

12.1　位置矢量·位移矢量

物体在爆炸与冲击下,不但发生变形,而且发生位移。图12.1表示出一个物体在两个时刻的位形(configuration)。

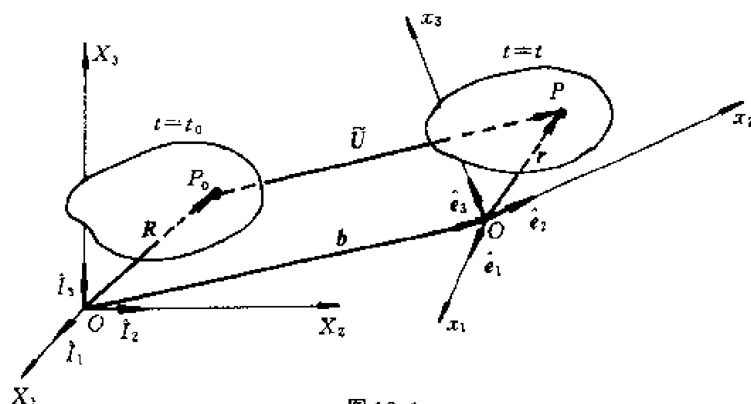


图12.1

图中取了两个直角笛卡尔坐标系(system of rectangular Cartesian coordinates),其中$OX_1X_2X_3$称作物质坐标系(system of material coordinates),它是用来表述物体在变形开始时刻($t=t_0$)各个质点所处空间位置的,如P_0点的初始位置以坐标(X_1,X_2,X_3)来表示,P_0与原点O的有向连线$\boldsymbol{R}$称作初始位置矢量(initial position vector):

$$\boldsymbol{R}=X_1\hat{\boldsymbol{I}}_1+X_2\hat{\boldsymbol{I}}_2+X_3\hat{\boldsymbol{I}}_3=X_K\hat{\boldsymbol{I}}_K \tag{12.1}$$

其中$\hat{\boldsymbol{I}}_1,\hat{\boldsymbol{I}}_2,\hat{\boldsymbol{I}}_3$为沿物质坐标轴向的单位矢量,($X_1,X_2,X_3$)称作物质坐标,一般以它来标记质点,正如我们在§3.1中所指出那样,除了特别指出,本书将以质点变形前在空间的坐标(X_1,X_2,X_3)来标记质点,有时亦用矢量$\boldsymbol{R}$来代表。

在图中所取的另一坐标系$Ox_1x_2x_3$称作空间坐标系(system of spatial coordinates),它是用来表述物体在变形开始后的任一时刻($t=t$)各质点所处的空间位置的,如前而所提到的原处于P_0点的那个质点现处于P点,它在$Ox_1x_2x_3$坐标系中的坐标为($x_1x_2x_3$),P与原点O的有向连线$\boldsymbol{r}$称为位置矢量。

$$\boldsymbol{r}=x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1+x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2+x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3=x_k\hat{\boldsymbol{e}}_k \tag{12.2}$$

其中 $\hat{e}_1$、$\hat{e}_2$、$\hat{e}_3$ 为沿空间坐标轴向的单位矢量，(x_1, x_2, x_3) 称作空间坐标，以它来标记质点现在($t = t$ 时) 所处的空间位置或任一时刻所处的空间位置。

物质坐标系 $OX_1X_2X_3$ 与空间坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 之间的相对方位(relative orientation)由方向余弦(direction cosines) α_{kK} 或 α_{Kk} 来确定，它为 $\hat{e}_k$ 与 $\hat{I}_K$ 的点积(dot product)：

$$\alpha_{kK} = \hat{e}_k \cdot \hat{I}_K = \hat{I}_K \cdot \hat{e}_k = \alpha_{Kk} \tag{12.3}$$

在 α_{kK} 或 α_{Kk} 中出现的下标不是哑标(dummy indices)，而是自由指标(free indices)，因 K 与 k 为大小写而不同。利用式(12.3)所定义的方向余弦，则可写出

$$\hat{e}_k = \alpha_{kK}\hat{I}_K = \alpha_{Kk}\hat{I}_K \tag{12.4}$$

$$\hat{I}_K = \alpha_{Kk}\hat{e}_k = \alpha_{kK}\hat{e}_k \tag{12.5}$$

由于 $Ox_1x_2x_3$ 和 $OX_1X_2X_3$ 都是正交系(orthogonality system)，所以

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad , \quad \hat{I}_P \cdot \hat{I}_Q = \delta_{PQ} \tag{12.6}$$

由(12.4)、(12.5)和(12.6)式则推出

$$\begin{cases} \alpha_{iK}\alpha_{jK} = \alpha_{Ki}\alpha_{Kj} = \delta_{ij} \\ \alpha_{Pk}\alpha_{Qk} = \alpha_{kP}\alpha_{kQ} = \delta_{PQ} \end{cases} \tag{12.7}$$

一个质点在两个时刻所处的空间位置(如点 P_0 和点 P) 的有向连线(如 $\tilde{U}$) 称作位移矢量(displacement vector)。图 12.1 所示的 $\tilde{U}$，在两个坐标系中分别表成

$$\tilde{U} = \tilde{U}_K\hat{I}_K \quad , \quad \tilde{u} = \tilde{u}_k\hat{e}_k \tag{12.8}$$

即

$$\tilde{U} = \tilde{U}_K\hat{I}_K = \tilde{u}_k\hat{e}_k = \tilde{u} \tag{12.9}$$

$$\tilde{U}_K = \alpha_{kK}\tilde{u}_k \tag{12.10}$$

图 12.1 中的矢量 b 为两个坐标系(物质坐标系和空间坐标系)的原点(origin)之间的有向连线，根据图示的几何关系则有

$$\tilde{U} = \tilde{u} = b + r - R \tag{12.11}$$

两种重要的特殊情况：

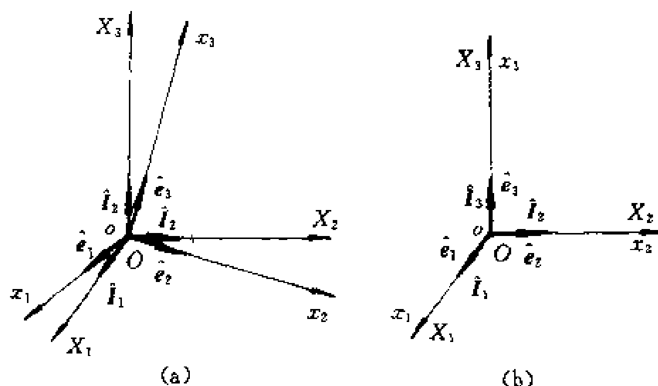


图 12.2

①物质坐标系与空间坐标系的原点重合，如图 12.2(a)所示，这时图 12.1 中所示的 $b = 0$，于是式(12.11)变成

$$\tilde{U} = \tilde{u} = r - R \tag{12.12}$$

即有

$$\tilde{u}_k = x_k - \alpha_{kK} X_K \tag{12.13}$$

②物质坐标系与空间坐标系重合，如图 12.2(b)所示。这是一种最重要的常用的情况，在本书的如下论述中，除非特别需要，将只限于使用这种情况[①]。在此情况下

$$\hat{e}_j = \hat{I}_J \quad , \quad \alpha_{jK} = \alpha_{Kj} = \delta_{jk} = \delta_{JK} \tag{12.14}$$

从而式(12.13)变成

$$\tilde{u}_k = x_k - X_k \tag{12.15}$$

12.2 变形梯度·位移梯度

物体在变形过程中，构成物体的各个质点要发生运动；当质点不同、时刻不同，它们各自所处的空间位置亦不同。质点 (X_1, X_2, X_3) 亦以 $\boldsymbol{R}$ 代表，它所处空间位置 $\boldsymbol{r}$ 与时间 t 的关系(即该质点的轨迹)为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{R}, t) \quad ，或 \quad x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(\boldsymbol{R}, t) \tag{12.16}$$

其中

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{R}, t_0) = X_i \hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{12.17}$$

式中 t_0 为运动开始的时间或某一固定时刻，不过在如下，则取 $t_0 = 0$，即运动变形开始的时刻。而 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 即 $\hat{\boldsymbol{I}}$，从此开始将物质坐标系与空间坐标系取在一起且均在直角坐标系中研究问题。

反过来，在任一时刻 t，在介质(物体) 所占空间中的任一点($\boldsymbol{r}$) 均对应一个确定的质点 $\boldsymbol{R}$，即

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}, t) \quad ，或 \quad X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) = X_i(\boldsymbol{r}, t) \tag{12.18}$$

式(12.18)实际是式(12.16)所示函数的反函数(inverse function)，存在的条件是雅可比行列式(Jacobian) J 不为零，即

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| \neq 0 \tag{12.19}$$

12.2.1 变形梯度(deformation gradient)

对(12.16)式对 X_j 求偏导则给出物质变形张量(material deformation tensor)

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{R}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X_3}\hat{e}_3 = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{12.20}$$

其中 $\{\partial x_i / \partial X_j\}$ 称作物质变形梯度(material deformation gradient)，它的矩阵写法为

$$\mathscr{F} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial X_1 & \partial x_1/\partial X_2 & \partial x_1/\partial X_3 \\ \partial x_2/\partial X_1 & \partial x_2/\partial X_2 & \partial x_2/\partial X_3 \\ \partial x_3/\partial X_1 & \partial x_3/\partial X_2 & \partial x_3/\partial X_3 \end{bmatrix} \tag{12.21}$$

对式(12.18)对 x_j 求偏导则给出空间变形张量(spatial deformation tensor)

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x_3}\hat{e}_3 = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j \tag{12.22}$$

---

① 同时，在本章以下的研究中均使用直角笛卡尔坐标系(简称直角坐标系)。

* 关于在柱坐标等曲线坐标系的应变、应变率的表达式，请看附录 12.2～12.4。

其中 $\{\partial X_i/\partial X_j\}$ 称作空间变形梯度(spatial deformation gradient)，它的矩阵写法为

$$\mathscr{M}=\left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right]=\begin{bmatrix}\partial X_1/\partial x_1 & \partial X_1/\partial x_2 & \partial X_1/\partial x_3\\ \partial X_2/\partial x_1 & \partial X_2/\partial x_2 & \partial X_2/\partial x_3\\ \partial X_3/\partial x_1 & \partial X_3/\partial x_2 & \partial X_3/\partial x_3\end{bmatrix} \tag{12.23}$$

根据偏微商的连锁法则(chain rule)，物质变形梯度与空间变形梯度之间满足

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=\frac{\partial x_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial X_j}=\delta_{ij}=\frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}=\frac{\partial X_i}{\partial X_j} \tag{12.24}$$

12.2.2 位移梯度(displacement gradient)

据(12.12)式，位移矢量现写作(从此开始，位移矢量只用 $\tilde{U}$ 表示)

$$\tilde{\boldsymbol{U}}=\tilde{u}_i\hat{\boldsymbol{e}}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}=x_i\hat{\boldsymbol{e}}_i-X_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{12.25}$$

对于上式对 X_j 求偏导，则给出物质位移张量(material displacement tensor)

$$\begin{cases}\mathbf{J}=\dfrac{\partial\tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial\boldsymbol{R}}=\dfrac{\partial\tilde{u}_i}{\partial X_j}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j=\mathbf{F}-\mathbf{I}\\ \dfrac{\partial\tilde{u}_i}{\partial X_j}=\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}-\delta_{ij}\end{cases} \tag{12.26}$$

其中 $\{\partial u_i/\partial X_j\}$ 称作物质位移梯度(material displacement gradient)，它的矩阵写法为

$$\mathscr{T}=\left[\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial X_j}\right]=\begin{bmatrix}\partial\tilde{u}_1/\partial X_1 & \partial\tilde{u}_1/\partial X_2 & \partial\tilde{u}_1/\partial X_3\\ \partial\tilde{u}_2/\partial X_1 & \partial\tilde{u}_2/\partial X_2 & \partial\tilde{u}_2/\partial X_3\\ \partial\tilde{u}_3/\partial X_1 & \partial\tilde{u}_3/\partial X_2 & \partial\tilde{u}_3/\partial X_3\end{bmatrix} \tag{12.27}$$

对(12.25)式对 x_i 求偏导，则给出空间位移张量(spatial displaeement tensor)

$$\begin{cases}\mathbf{K}=\dfrac{\partial\tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial\boldsymbol{r}}=\dfrac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j=\mathbf{I}-\mathbf{M}\\ \dfrac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}=\delta_{ij}-\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}\end{cases} \tag{12.28}$$

其中 $\{\partial\tilde{u}_i/\partial x_j\}$ 称作空间位移梯度(spatial displacement gradient)，它的矩阵写法为

$$\mathscr{K}=\left[\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}\right]=\begin{bmatrix}\partial\tilde{u}_1/\partial x_1 & \partial\tilde{u}_1/\partial x_2 & \partial\tilde{u}_1/\partial x_3\\ \partial\tilde{u}_2/\partial x_1 & \partial\tilde{u}_2/\partial x_2 & \partial\tilde{u}_2/\partial x_3\\ \partial\tilde{u}_3/\partial x_1 & \partial\tilde{u}_3/\partial x_2 & \partial\tilde{u}_3/\partial x_3\end{bmatrix} \tag{12.29}$$

12.3 变形张量·有限应变张量

在物质坐标系与空间坐标系重合的空间里，给出一个连续介质体(物体)的初始(未变形)与变形后某个时刻 t(由于考虑到物体的动态变化，t 不一定是变形结束时间)的位形，如图 12.3 所示。

在变形开始时($t=0$)，有一质点处在 P_0，该点的坐标为(X_1,X_2,X_3)，现以这个坐标或者说位置矢量 $\boldsymbol{R}=X_i\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 标记这个质点；在该点附近有另一质点处在 Q_0，Q_0 的坐标与矢径(即位置矢量)分别为：($X_1+\delta X_1,X_2+\delta X_2,X_3+\delta X_3$)和 $\boldsymbol{R}+\delta\boldsymbol{R}$，如图所示，其中 $|\delta\boldsymbol{R}|$ 为小量，当然亦以这点的坐标或位置矢量代表该质点。

在变形后的 t 时刻，原处于 P_0 点的质点移至 P 点(x_1,x_2,x_3)；原处于 Q_0 点的质点移至 Q 点($x_1+\delta x_1,x_2+\delta x_2,x_3+\delta x_3$)，即物质线元 $\delta\boldsymbol{R}\to\delta\boldsymbol{r}$. 按(12.16)式和(12.18)式，则有

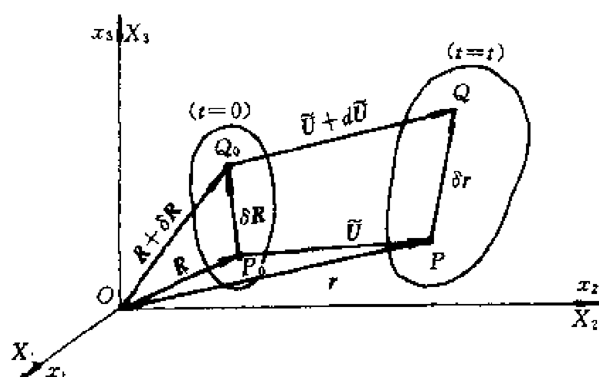


图 12.3

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$\delta \boldsymbol{r} = \delta x_i \hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X_j}\delta X_j = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\delta X_j \hat{\boldsymbol{e}}_i = \mathbf{F}\cdot\delta\boldsymbol{R} \tag{12.30}$$

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$\delta \boldsymbol{R} = \delta X_i \hat{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x_j}\delta x_j = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\delta x_j \hat{\boldsymbol{e}}_i = \mathbf{M}\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{12.31}$$

于是有

$$(\delta R)^2 = \delta\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{R} = \delta X_k \delta X_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j}\delta x_i \delta x_j$$

$$= C^{\blacktriangledown}_{ij}\delta x_i \delta x_j = \delta\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{C}^{\blacktriangledown}\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{12.32}$$

其中

$$\mathbf{C}^{\blacktriangledown} = \mathbf{M}_C\cdot\mathbf{M} \quad , \quad C^{\blacktriangledown}_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} \tag{12.33}$$

二阶张量 $\mathbf{C}^{\blacktriangledown}$ 称作**哥西变形张量**(Cauchy's deformation tensor)。

据(12.30)式,则有

$$(\delta r)^2 = \delta\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \delta x_k \delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}\delta X_i \delta X_j$$

$$= G_{ij}\delta X_i \delta X_j = \delta\boldsymbol{R}\cdot\mathbf{G}\cdot\delta\boldsymbol{R} \tag{12.34}$$

其中

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_C\cdot\mathbf{F} \quad , \quad G_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} \tag{12.35}$$

二阶张量 G 称作**格林变形张量**(Green's deformation tensor)。

利用如上所述线元变形前后的平方差:$(\delta r)^2-(\delta R)^2$ 来量度该物质线元的变形,如果这个差为零,则称这个线元发生的为刚性位移(rigid displacement)。由(12.34)和(12.32)式可给出这差的表达式

$$(\delta r)^2-(\delta R)^2 = \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_i}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}-\delta_{ij}\right)\delta X_i \delta X_j = 2L_{ij}\delta X_i \delta X_j$$

或写成

$$(\delta r)^2-(\delta R)^2=\delta \boldsymbol{R}\cdot(\mathbf{F}_C\cdot\mathbf{F}-\mathbf{I})\cdot\delta\boldsymbol{R}=\delta\boldsymbol{R}\cdot 2\mathbf{L}_G\cdot\delta\boldsymbol{R} \tag{12.36}$$

其中

$$\begin{cases}\mathbf{L}_G=\dfrac{1}{2}(\mathbf{F}_C\cdot\mathbf{F}-\mathbf{I})=\dfrac{1}{2}(\mathbf{G}-\mathbf{I})\\ L_{ij}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial x_k}{\partial X_i}\dfrac{\partial x_k}{\partial X_j}-\delta_{ij})=\dfrac{1}{2}(G_{ij}-\delta_{ij})\end{cases} \tag{12.37}$$

张量 $\mathbf{L}_G$ 称作拉格朗日(或格林)有限应变张量(Lagrangian (or Green's) finite strain tensor),它是对称的二阶张量。

由式(12.34)和(12.32)亦可给出线元平方差的另一种表达形式

$$(\delta r)^2-(\delta R)^2=(\delta_{ij}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\frac{\partial X_k}{\partial x_j})\delta x_i\delta x_j=2E_{ij}\delta x_i\delta x_j$$

或写成

$$(\delta r)^2-(\delta R)^2=\delta\boldsymbol{r}\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{M}_C\cdot\mathbf{M})\cdot\delta\boldsymbol{r}=\delta\boldsymbol{r}\cdot 2\mathbf{E}_A\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{12.38}$$

其中

$$\begin{cases}\mathbf{E}_A=\dfrac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{M}_C\cdot\mathbf{M})=\dfrac{1}{2}(\mathbf{I}-\mathbf{C}^{\blacktriangledown})\\ E_{ij}=\dfrac{1}{2}(\delta_{ij}-\dfrac{\partial X_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial X_k}{\partial x_j})=\dfrac{1}{2}(\delta_{ij}-C_{ij}^{\blacktriangledown})\end{cases} \tag{12.39}$$

张量 $\mathbf{E}_A$ 称作欧拉(或埃勒曼司)有限应变张量(Eulerian (or Almansi's) finite strain tensor),它是对称的二阶张量。

拉格朗日和欧拉有限应变张量的特别有用的形式是将它们表成位移梯度的函数。因此,利用(12.26)式可将(12.37)式改写成

$$\begin{cases}\mathbf{L}_G=\dfrac{1}{2}(\mathbf{J}+\mathbf{J}_C+\mathbf{J}_C\cdot\mathbf{J})\\ L_{ij}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial\tilde{u}_i}{\partial X_j}+\dfrac{\partial\tilde{u}_j}{\partial X_i}+\dfrac{\partial\tilde{u}_k}{\partial X_i}\dfrac{\partial\tilde{u}_k}{\partial X_j})\end{cases} \tag{12.40}$$

利用(12.28)式可将(12.39)式改写成

$$\begin{cases}\mathbf{E}_A=\dfrac{1}{2}(\mathbf{K}+\mathbf{K}_C-\mathbf{K}_C\cdot\mathbf{K})\\ E_{ij}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}-\dfrac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_i}\dfrac{\partial\tilde{u}_k}{\partial x_j})\end{cases} \tag{12.41}$$

如上给出有限应变的各种形式。有限应变是用来处理物体变形有限且随时间的变化率不大的力学问题。如果物体变形很小或者是随时间变化很快的大变形,则用另外形式的应变,特别是对于动载大变形情况。

12.4 小变形理论·无限小应变张量

在连续介质力学中所谓的小变形理论,它的基本要求是位移梯度的各分量值远小于"1",从而保证是小变形,这可从将式(12.36)或(12.38)中的应变换成位移后清楚地看出。小变形下的应变称作无限小应变(infinitesimal strain),通称小应变,亦称习用应变(conventional strain)。

在小变形的情况下，问题得到很大的简化，不仅应变可表成位移梯度的线性形式，而且在一般情况下可以不必区分空间坐标与物质坐标。导出小应变的表达式有两种方法。

12.4.1 从有限应变出发

在式(12.40)中由于 $\| \partial \tilde{u}_i / \partial X_j \| \ll 1$（注意，在此为了避免与取行列式值的情况混淆，用“$\| \quad \|$”表示取绝对值），故可从该式中略去二级小量，于是

$$\begin{cases} \mathbf{L}_G \to \mathbf{L}^{\blacktriangle} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}_C) \\ L_{ij} \to L_{ij}^{\blacktriangle} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} + \dfrac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i}\right) \end{cases} \tag{12.42}$$

同理，在式(12.41)中略去二阶小量后则

$$\begin{cases} \mathbf{E}_A \to \mathbf{E}^{\blacktriangle} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{K} + \mathbf{K}_C) \\ E_{ij} \to E_{ij}^{\blacktriangle} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right) \end{cases} \tag{12.43}$$

式(12.42)和(12.43)就是**小应变的表达式**，它们与位移梯度的关系是线性的。有人将 $\mathbf{L}^{\blacktriangle}$ 称作**拉格朗日线性应变张量**；$\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 称作**欧拉线性应变张量**。

在导出 $\mathbf{L}^{\blacktriangle}$ 和 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 的表达式时，使用了 $\partial \tilde{u}_i / \partial X_j$ 和 $\partial \tilde{u}_i / \partial x_j$ 同是小量的假设，其实由前者是小量便可推出后者亦为小量；反之亦然，即在小变形的情况下

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \tag{12.44}$$

从而

$$\mathbf{L}^{\blacktriangle} \approx \mathbf{E}^{\blacktriangle} \quad \text{或} \quad L_{ij}^{\blacktriangle} \approx E_{ij}^{\blacktriangle} \tag{12.45}$$

故从此开始，对于**小应变**，本书(第十三章除外)一般不再区分空间坐标与物质坐标、拉格朗日应变与欧拉应变，而统一使用如下符号和表达式表示小应变，即用

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\blacktriangle} = E_{ij}^{\blacktriangle} \hat{e}_i \hat{e}_j = \{E_{ij}^{\blacktriangle}\} \\ E_{ij}^{\blacktriangle} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} - \dfrac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i}\right) \end{cases} \tag{12.46}$$

12.4.2 从最常见的方式出发

为了能从物理上较好地解释小应变的各分量的意义，我们再按最常用的方式导出小应变。在常用的方式中，其坐标、单位矢量和位移分量在直角坐标系中一般采用 (x,y,z)、(X,Y,Z)、$(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ 和 $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ 等符号，对照如上即有

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = Y \\ X_3 = Z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{e}_1 = \hat{i} \\ \hat{e}_2 = \hat{j} \\ \hat{e}_3 = \hat{k} \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{u}_1 = \tilde{u} \\ \tilde{u}_2 = \tilde{v} \\ \tilde{u}_3 = \tilde{w} \end{cases} \tag{12.47}$$

根据质点轨迹与位移的关系并参见图 12.3，则有

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R} = \widetilde{\boldsymbol{U}} \tag{12.48}$$

$$\delta \boldsymbol{r} - \delta \boldsymbol{R} = \mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{U}} = \mathrm{d}\tilde{u}\hat{i} + \mathrm{d}\tilde{v}\hat{j} + \mathrm{d}\tilde{w}\hat{k} \tag{12.49}$$

两质点的位移差 $\mathrm{d}\widetilde{U}$ 是由于 δR 的伸长(或压缩)和旋转所致，图 12.4 表示出矢量 $\delta \boldsymbol{r}$ 和 $\delta \boldsymbol{R}$(在图 12.4 中是将 δR 和 δr 作为自由矢量，把二者的尾端放在一起)。由于为小变形，所

以 $\mathrm{d}\tilde{u}$、$\mathrm{d}\tilde{v}$、$\mathrm{d}\tilde{w}$ 为比 δX、δY、δZ 更小一阶的量，作为一级近似，它们可取成

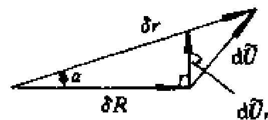


图 12.4

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{u} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial X}\delta X + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}\delta Y + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Z}\delta Z \\ \mathrm{d}\tilde{v} = \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial X}\delta X + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial Y}\delta Y + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial Z}\delta Z \\ \mathrm{d}\tilde{w} = \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial X}\delta X + \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial Y}\delta Y + \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial Z}\delta Z \end{cases} \tag{12.50}$$

式中 $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial X}$、$\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}$、… 等偏导数均在点 (X,Y,Z) 处点取值。将 $\mathrm{d}\tilde{U}$ 按张量写法，表成

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{U}} &= \mathbf{J} \cdot \delta \boldsymbol{R} \\ &= J_{1j}\delta X_j \hat{\boldsymbol{i}} + J_{2j}\delta X_j \hat{\boldsymbol{j}} + J_{3j}\delta X_j \hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{12.51}$$

其中

$$\mathbf{J} = \{J_{ij}\} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial X} & \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} & \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial X} & \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} & \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial X} & \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} & \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} \end{pmatrix} \tag{12.52}$$

将张量 J 作和分解

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{E}^{\blacktriangle} + \boldsymbol{H} \tag{12.53}$$

其中对称张量：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\blacktriangle} &= \{E_{ij}^{\blacktriangle}\} = \{\frac{1}{2}(J_{ij} + J_{ji})\} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial X} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial X}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} + \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial X}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}\right) & \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} + \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial Y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial X} + \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} + \dfrac{\partial \tilde{v}}{\partial Z}\right) & \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12.54.1}$$

即：

$$E_{ij}^{\blacktriangle} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i}\right) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \tag{12.54.2}$$

在上式中 $\begin{cases} \tilde{u}_1 = \tilde{u} \\ \tilde{u}_2 = \tilde{v} \\ \tilde{u}_3 = \tilde{w} \end{cases}$，$\begin{cases} X_1 = X \\ X_2 = Y \\ X_3 = Z \end{cases}$，如 $\tilde{u}_{1,2} = \dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial X_2} = \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}$.

反对称张量：

$$\mathbf{H} = \{h_{ij}\} = \{\frac{1}{2}(J_{ij} - J_{ji})\}$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial X}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{12.55}
$$

令：

$$
\alpha = \alpha_x \hat{i} + \alpha_y \hat{j} + \alpha_z \hat{k} \tag{12.56}
$$

其中

$$
\begin{cases} \alpha_x = \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z}\right) = h_{32} = -h_{23} \\ \alpha_y = \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} - \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X}\right) = h_{13} = -h_{31} \\ \alpha_z = \alpha_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}\right) = h_{21} = -h_{12} \end{cases} \tag{12.57}
$$

则有

$$
\mathbf{H} \cdot \delta \boldsymbol{R} = \alpha \times \delta \boldsymbol{R} = \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{U}}_r \tag{12.58}
$$

矢量 $\mathrm{d}\tilde{U}_r = \alpha \times \delta \boldsymbol{R}$ 垂直 $\delta \boldsymbol{R}$，见图 12.4，$\mathrm{d}\tilde{U}_r$ 为 $\delta \boldsymbol{R}$ 作为刚体的旋转矢量，α 为旋转角度。

利用以上结果，式(12.51)可表成

$$
\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{U}} = \mathbf{E}^{\blacktriangle} \cdot \delta \boldsymbol{R} + \boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{R} = \mathbf{E}^{\blacktriangle} \cdot \delta \boldsymbol{R} + \alpha \times \delta \boldsymbol{R} = \mathbf{E}^{\blacktriangle} \cdot \delta \boldsymbol{R} + \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{U}}_r \tag{12.59}
$$

因 $\mathrm{d}\tilde{U}_r$ 为 δR 作为刚体旋转的位移矢量，所以 $\mathrm{d}\tilde{U} - \mathrm{d}\tilde{U}_r = \mathbf{E}^{\blacktriangle} \cdot \delta \boldsymbol{R}$ 为 $\delta \boldsymbol{R}$ 的“纯变形”矢量，即 $\mathbf{E}^{\blacktriangle} \cdot \delta \boldsymbol{R}$ 可以看作 $\delta \boldsymbol{R}$ 的“纯伸长或缩短”。

$\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 称作习用应变张量，它是对称的 $E_{ij}^{\blacktriangle} = E_{ji}^{\blacktriangle}$. 它的主对角线上的分量 $E_{11}^{\blacktriangle} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} = \frac{\partial (x - X)}{\partial X}$、$E_{22} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} = \frac{\partial (y - Y)}{\partial Y}$、$E_{33} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} = \frac{\partial (z - Z)}{\partial Z}$ 分别表示在 x, y, z 轴向的线元 δX、δY、δZ 的相对伸长(或压缩)；$E_{12}^{\blacktriangle} = E_{21}^{\blacktriangle}$、$E_{13}^{\blacktriangle} = E_{31}^{\blacktriangle}$、$E_{23}^{\blacktriangle} = E_{32}^{\blacktriangle}$ 为切应变分量，它们分别表示微元 δX 和 δY、δX 和 δZ、δY 和 δZ 的夹角改变量的一半。(详细解释，见 12.4.3 段)

注意，如上所述的应变张量与固体静力学所用的张量之区别在于，$E_{ij}^{\blacktriangle}$ 不但随质点变化，而且随时间变化，$E_{ij}^{\blacktriangle} = E_{ij}^{\blacktriangle}(X, Y, Z, t)$。

12.4.3 解释 $\mathrm{d}\tilde{U}_r$ 为何表示线元作刚性旋转

按(12.49)式，则有

$$
\begin{aligned} \delta r &= \delta \boldsymbol{R} + \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{U}} \\ &= (\delta X + \mathrm{d}\tilde{u})\hat{i} + (\delta Y + \mathrm{d}\tilde{v})\hat{j} + (\delta Z + \mathrm{d}\tilde{w})\hat{k} \end{aligned}
$$

$$
(\delta r)^2 = (\delta X + \mathrm{d}\tilde{u})^2 + (\delta Y + \mathrm{d}\tilde{v})^2 + (\delta Z + \mathrm{d}\tilde{w})^2 \tag{12.60}
$$

由于现在研究的是小变形，故：$|\delta X| \gg |d\tilde{u}|, |\delta Y| \gg |d\tilde{v}|, |\delta Z| \gg |d\tilde{w}|$，于是在上式中略去二级小量后则成为

$$
(\delta r)^2 = (\delta R)^2 + 2(\mathrm{d}\tilde{u}\delta X + \mathrm{d}\tilde{v}\delta Y + \mathrm{d}\tilde{w}\delta Z) \tag{12.61}
$$

如若线元 $\delta \boldsymbol{R} \to \delta r$ 只发生了刚性旋转(rigid rotation)，则 $(\delta r)^2 - (\delta R)^2 \equiv 0$，于是由上式推出

$$
\mathrm{d}\tilde{u}\delta X + \mathrm{d}\tilde{v}\delta Y + \mathrm{d}\tilde{w}\delta Z \equiv 0
$$

利用(12.51)式,可将上式化成

$$J_{11}(\delta X)^2 + J_{22}(\delta Y)^2 + J_{33}(\delta Z)^2 + (J_{12} + J_{21})\delta X\delta Y + (J_{13} + J_{31})\delta X\delta Z + (J_{23} + J_{32})\delta Y\delta Z \equiv 0 \tag{12.62}$$

由于 $\delta\boldsymbol{R}$ 是任取的,即 δX、δY、δZ 是任取的,要保证如上恒等式成立,则 δX、δY、δZ 之前的各系数必须为零,即有

$$\begin{cases} J_{11} = J_{22} = J_{33} = 0 \\ J_{12} + J_{21} = 0 \quad , \quad J_{13} + J_{31} = 0 \quad , \quad J_{23} + J_{32} = 0 \end{cases} \tag{12.63}$$

根据 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 的定义式(12.54),则由上式推出

$$E_{ij}^{\blacktriangle} = \frac{1}{2}(J_{ij} + J_{ji}) = 0 \quad 或 \quad \mathbf{E}^{\blacktriangle} = 0 \tag{12.64}$$

于是由式(12.49)、(12.51)、(12.53)以及上式推出

$$\delta\boldsymbol{r} - \delta\boldsymbol{R} = \mathbf{J}\cdot\delta\boldsymbol{R} = \mathbf{H}\cdot\delta\boldsymbol{R} = \mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{U}}_r \tag{12.65}$$

从而说明 $\mathrm{d}\widetilde{U}_r$ 表示线元 $\delta\boldsymbol{R}$ 作刚性旋转的位移矢量。当然 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}\cdot\delta\boldsymbol{R}$ 则表示线元 $\delta\boldsymbol{R}$ 的"纯变形"的矢量。

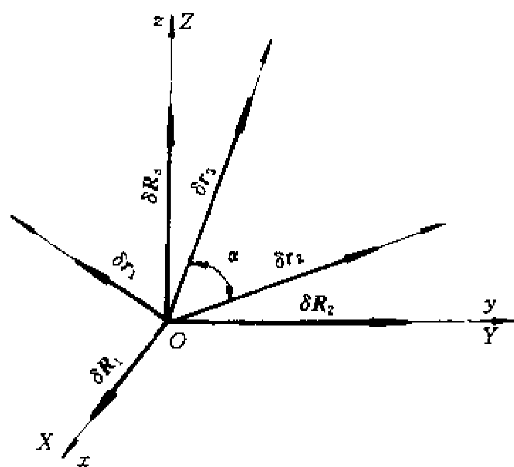


图 12.5

12.4.4 关于 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 各分量的物理意义

设在变形开始时有一物质线元 δR

$$\delta\boldsymbol{R} = \delta\boldsymbol{R}_1 + \delta\boldsymbol{R}_2 + \delta\boldsymbol{R}_3$$

其中

$$\delta\boldsymbol{R}_1 = \delta X\hat{\boldsymbol{i}}, \qquad \delta\boldsymbol{R}_2 = \delta Y\hat{\boldsymbol{j}}, \qquad \delta\boldsymbol{R}_3 = \delta Z\hat{\boldsymbol{k}}$$

变形后 $\delta\boldsymbol{R} \rightarrow \delta\boldsymbol{r}$, 即

$$\delta\boldsymbol{R}_1 \rightarrow \delta\boldsymbol{r}_1, \qquad \delta\boldsymbol{R}_2 \rightarrow \delta\boldsymbol{r}_2, \qquad \delta\boldsymbol{R}_3 \rightarrow \delta\boldsymbol{r}_3$$

在图 12.5 中表示出 $\delta\boldsymbol{R}$ 与 $\delta\boldsymbol{r}$ 的各分矢量,但没有画出 $\delta\boldsymbol{R}$ 和 $\delta\boldsymbol{r}$ 的本身。

按(12.49)式则有

$$\delta\boldsymbol{r}_1 - \delta\boldsymbol{R}_1 = (\mathrm{d}\tilde{u})_1\hat{\boldsymbol{i}} + (\mathrm{d}\tilde{v})_1\hat{\boldsymbol{j}} + (\mathrm{d}\tilde{w})_1\hat{\boldsymbol{k}} = (\frac{\partial\tilde{u}}{\partial X}\delta X)\hat{\boldsymbol{i}} + (\frac{\partial\tilde{v}}{\partial X}\delta X)\hat{\boldsymbol{j}} + (\frac{\partial\tilde{w}}{\partial X}\delta X)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{12.66}$$

$$\delta \boldsymbol{r}_2 - \delta \boldsymbol{R}_2 = (\mathrm{d}\tilde{u})_2 \hat{\boldsymbol{i}} + (\mathrm{d}\tilde{v})_2 \hat{\boldsymbol{j}} + (\mathrm{d}\tilde{w})_2 \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$= (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}\delta Y)\hat{\boldsymbol{i}} + (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y}\delta Y)\hat{\boldsymbol{j}} + (\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y}\delta Y)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{12.67}$$

$$\delta \boldsymbol{r}_3 - \delta \boldsymbol{R}_3 = (\mathrm{d}\tilde{u})_3 \hat{\boldsymbol{i}} + (\mathrm{d}\tilde{v})_3 \hat{\boldsymbol{j}} + (\mathrm{d}\tilde{w})_3 \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$= (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z}\delta Z)\hat{\boldsymbol{i}} + (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z}\delta Z)\hat{\boldsymbol{j}} + (\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z}\delta Z)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{12.68}$$

将(12.66)式两边点乘(dot product) $\hat{\boldsymbol{i}}$ 后，给出

$$\delta x_1 - \delta X = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X}\delta X \quad , \quad \delta x_1 = \delta \boldsymbol{r}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{i}}$$

从而推出

$$\frac{\delta x_1 - \delta X}{\delta X} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} \equiv E^{\blacktriangle}_{XX} = E^{\blacktriangle}_{11}$$

即 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 的分量 $E^{\blacktriangle}_{XX}$ 为线元 $\delta \boldsymbol{R}$ 的分量 δX 在 x 轴向的相对伸长。同理可以推出

$$\frac{\delta y_2 - \delta Y}{\delta Y} = E^{\blacktriangle}_{YY} = E^{\blacktriangle}_{22} \quad , \quad \delta y_2 = \delta \boldsymbol{r}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\frac{\delta z_3 - \delta Z}{\delta Z} = E^{\blacktriangle}_{ZZ} = E^{\blacktriangle}_{33} \quad , \quad \delta z_3 = \delta \boldsymbol{r}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{k}}$$

即 $E^{\blacktriangle}_{YY}$ 和 $E^{\blacktriangle}_{ZZ}$ 分别为线元 $\delta \boldsymbol{R}$ 的分量 δY 和 δZ 在各自轴向的相对伸长。

如下解释 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 的剪切分量的物理意义。为此，将(12.67)和(12.68)式改写成

$$\delta \boldsymbol{r}_2 = (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}\delta Y)\hat{\boldsymbol{i}} + (\delta Y + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y}\delta Y)\hat{\boldsymbol{j}} + (\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y}\delta Y)\hat{\boldsymbol{k}}$$

$$\delta \boldsymbol{r}_3 = (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z}\delta Z)\hat{\boldsymbol{i}} + (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z}\delta Z)\hat{\boldsymbol{j}} + (\delta Z + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z}\delta Z)\hat{\boldsymbol{k}}$$

将 $\delta \boldsymbol{r}_2$ 与 $\delta \boldsymbol{r}_3$ 点乘，并设它们之间的夹角为 α，则由如上两式推出

$$\delta \boldsymbol{r}_2 \cdot \delta \boldsymbol{r}_3 = \delta r_2 \delta r_3 \cos\alpha = \delta r_2 \delta r_3 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$= (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y}\delta Y)(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z}\delta Z) + (\delta Y + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y}\delta Y)(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z}\delta Z) + (\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y}\delta Y)(\delta Z + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z}\delta Z) \tag{12.69}$$

而

$$\begin{cases} \delta r_2 = \sqrt{(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y})^2 + (1 + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y})^2 + (\frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y})^2}\delta y \\ \delta r_3 = \sqrt{(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z})^2 + (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z})^2 + (1 + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z})^2}\delta Z \end{cases} \tag{12.70}$$

在(12.69)和(12.70)式中略去位移各偏导数二次方及二次方以上的项，则由(12.69)式得到

$$\delta Y \delta Z \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z}\delta Y \delta Z + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y}\delta Y \delta Z$$

再考虑到“$\boldsymbol{R}_2$ 与 $\boldsymbol{R}_3$ 由原夹角 $\pi/2$”变成现在“$\boldsymbol{r}_2$ 与 $\boldsymbol{r}_3$ 夹角 α”，其改变量 $(\pi/2 - \alpha)$ 很小(所研究的为小变形)，于是由上式得到

$$\delta Y \delta Z(\frac{\pi}{2} - \alpha) \approx (\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Y})\delta Y \delta Z$$

从而得到

$$E_{23}^{\blacktriangle} = E_{32}^{\blacktriangle} = E_{YZ}^{\blacktriangle} \approx \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

即 $E_{YZ}^{\blacktriangle}$ 为线元 $\delta\boldsymbol{R}$ 的 Y 向与 Z 向分量(亦即在原坐标 Y 向与 Z 向的两个线元) 之夹角改变量的一半

同理可证,$E_{XY}^{\blacktriangle}$ 为线元 $\delta\boldsymbol{R}$ 的 X 向与 Y 向分量之夹角改变量的一半;$E_{XZ}^{\blacktriangle}$ 为线元 $\delta\boldsymbol{R}$ 的 X 向与 Z 向分量之夹角改变量的一半。

12.5 自然应变・自然应变增量

由于在爆炸与冲击中所涉及的固体问题均为动载大变形(dynamic loading and large deformation),所以描述这种固体的行为要使用自然应变(natural strain)

12.5.1 自然应变

自然应变一般由自然应变增量(natural strain increment)推出,一般给不出它与位移之间的明确表达式。由于自然应变增量张量是二阶对称张量,故作为自然应变增量张量之和的自然应变张量 $\mathbf{E}$ 亦是二阶对称张量,即

$$\mathbf{E} = \varepsilon_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \{\varepsilon_{ij}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \qquad (12.71)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

自然应变与习用应变不同。在空间固定坐标系中它是这样表述的:在变形开始时刻 ($t = 0$) 有一物质线段微元或微元体,随时间的推移它不断发生位移、旋转和尺度的变化,不同时刻它处于不同方位并具有不同的尺度,将其从 $t = 0$ 开始一直到 $t = t$ 时为止,把相对于线元或微元体在各个时刻所处的方位和尺度上的自然应变增量张量均旋转到该线元或微元体现在($t = t$ 时) 所处的方位上,进行叠加,即积分起来。这个积分结果就是该线元或微元体在 $t = t$ 时刻的自然应变张量。这就是说自然应变张量是按线元或微元体现在所处的方位上把它的应变增量从历史算到现在(但不要忘记把以前各个时刻的应变增量张量均旋转到线元现在所处的方位上)。

例如,已知某个微元体(即"质点") 在 $t = t_{n-1}$ 的时刻的应变张量 $\mathbf{E}_{n-1}$,求它在 $t = t_n$ 时刻的应变张量 $\mathbf{E}_n$. 已知微元体在 $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ 的时间内旋转了 $\Delta\alpha$ 角,且在此期间的自然应变增量为 $\Delta\mathbf{E}_{n-1}$,则 $\mathbf{E}_n$ 为

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_{n-1}^{\perp} + (\Delta\mathbf{E}_{n-1})^{\perp}$$

其中 $\mathbf{E}_{n-1}^{\perp}$ 是将张量 $\mathbf{E}_{n-1}$ 旋转 $\Delta\alpha$ 角度,即相当于将 $\mathbf{E}_{n-1}$ 表示在将原坐标系旋转 $-\Delta\alpha$ 角后的坐标系中,$(\Delta\mathbf{E}_{n-1})^{\perp}$ 同理。

自然应变增量,是指正在变形的线元或微元体,在某个时刻在所处的方位上的尺度变化量除以该线元或微元体在该时刻所具有的尺度。这就是该时刻的自然应变增量。

在一般情况下,自然应变没有明显的物理意义,也给不出明确的分析表达式。但在无旋转的情况,还是具有简单的物理意义和表达式。如考虑一段线元 l_0 在 x 轴向作均匀的一维拉伸,在变形开始时($t = 0$) 长度为 l_0,在 $t = t$ 时它的长度变为 l,则在 t 时的自然 ε 为

$$\varepsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{\mathrm{d}l}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon_0) \tag{12.72}$$

其中 ε_0 为线元 l_0 在 t 时刻的习用应变，它为

$$\varepsilon_0 = \frac{l - l_0}{l_0} \tag{12.73}$$

从式(12.72)和(12.73)可以明确地看出自然应变与习用应变的区别。不过在小变形的情况下二者近似近相等。

$$\varepsilon \approx \varepsilon_0 \tag{12.74}$$

自然应变偏量张量(deviator strain tensor) D 的定义为

$$\mathbf{D} = e_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \{e_{ij}\} = \mathbf{E} - \frac{1}{3}\theta_1\mathbf{I} \tag{12.75}$$

$$\theta_1 = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \tag{12.76}$$

其中
$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\theta_1\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m\delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_m = \frac{1}{3}\theta_1 \tag{12.77}$$

应变导数定义作：

$$\dot{\mathbf{E}}^* = \{\dot{\varepsilon}_{ij}^*\} = \left\{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon_{ij}' - \varepsilon_{ij}}{\Delta t}\right\} \tag{12.78}$$

其中
$$\begin{cases} \Delta t = t' - t \\ \varepsilon_{ij}' \text{ 为质点在 } t = t' \text{ 时的应变张量分量} \end{cases}$$

应变偏量导数定义作

$$\dot{\mathbf{D}}^* = \{\dot{e}_{ij}^*\} = \left\{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e_{ij}' - e_{ij}}{\Delta t}\right\} \tag{12.79}$$

其中 e_{ij}' 为 $t = t'$ 时的应变偏量张量分量。

12.5.2 自然应变增量(详细论证，见附录 12.1)

现考虑任一质点 A_0(其物质坐标为 X_A、Y_A、Z_A) 和另一质点 B_0(其物质坐标为 X_B、Y_B、

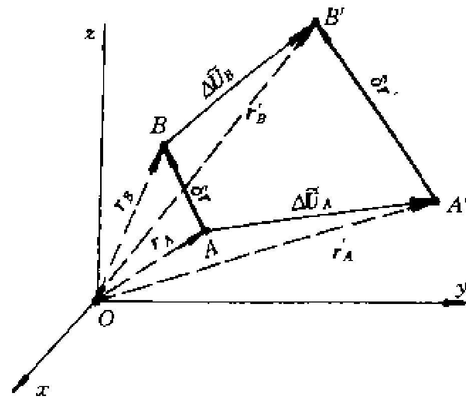


图 12.6

Z_B)，在 t 时刻它们分别处于空间的 A 点及其附近一点 B 点，如图 12.6 所示。在这个时刻，质点 A_0 和质点 B_0 的位置矢量 r_A 和 r_B、位移矢量 $\tilde{U}_A$ 和 $\tilde{U}_B$ 分别为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{r}_A = x_A\hat{\boldsymbol{i}} + y_A\hat{\boldsymbol{j}} + z_A\hat{\boldsymbol{k}} \\
\widetilde{\boldsymbol{U}}_A = \tilde{u}_A\hat{\boldsymbol{i}} + \tilde{v}_A\hat{\boldsymbol{j}} + \tilde{w}_A\hat{\boldsymbol{k}} \\
\quad = (x_A - X_A)\hat{\boldsymbol{i}} + (y_A - Y_A)\hat{\boldsymbol{j}} + (z_A - Z_A)\hat{\boldsymbol{k}} \\
\boldsymbol{r}_B = x_B\hat{\boldsymbol{i}} + y_B\hat{\boldsymbol{j}} + z_B\hat{\boldsymbol{k}} \\
\widetilde{\boldsymbol{U}}_B = \tilde{u}_B\hat{\boldsymbol{i}} + \tilde{v}_B\hat{\boldsymbol{j}} + \tilde{w}_B\hat{\boldsymbol{k}} \\
\quad = (x_B - X_B)\hat{\boldsymbol{i}} + (y_B - Y_B)\hat{\boldsymbol{j}} + (z_B - Z_B)\hat{\boldsymbol{k}}
\end{cases}
\tag{12.80}
$$

在 $t = t'$ 时刻，A_0、B_0 质点分别运动到空间的 A' 点和 B' 点，这时这两个质点的位置矢量 $\boldsymbol{r}'_A$ 和 $\boldsymbol{r}'_B$、位移矢量 $\widetilde{\boldsymbol{U}}'_A$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{U}}'_B$ 分别为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{r}'_A = x'_A\hat{\boldsymbol{i}} + y'_A\hat{\boldsymbol{j}} + z'_A\hat{\boldsymbol{k}} \\
\widetilde{\boldsymbol{U}}'_A = \tilde{u}'_A\hat{\boldsymbol{i}} + \tilde{v}'_A\hat{\boldsymbol{j}} + \tilde{w}'_A\hat{\boldsymbol{k}} \\
\quad = (x'_A - X_A)\hat{\boldsymbol{i}} + (y'_A - Y_A)\hat{\boldsymbol{j}} + (z'_A - Z_A)\hat{\boldsymbol{k}} \\
\boldsymbol{r}'_B = x'_B\hat{\boldsymbol{i}} + y'_B\hat{\boldsymbol{j}} + z'_B\hat{\boldsymbol{k}} \\
\widetilde{\boldsymbol{U}}'_B = \tilde{u}'_B\hat{\boldsymbol{i}} + \tilde{v}'_B\hat{\boldsymbol{j}} + \tilde{w}'_B\hat{\boldsymbol{k}} \\
\quad = (x'_B - X_B)\hat{\boldsymbol{i}} + (y'_B - Y_B)\hat{\boldsymbol{j}} + (z'_B - Z_B)\hat{\boldsymbol{k}}
\end{cases}
\tag{12.81}
$$

质点 A_0 和 B_0 在 t 时刻和 t' 时刻的间距矢量分别为

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A &= (x_B - x_A)\hat{\boldsymbol{i}} + (y_B - y_A)\hat{\boldsymbol{j}} + (z_B - z_A)\hat{\boldsymbol{k}} \\
&= \delta x\hat{\boldsymbol{i}} + \delta y\hat{\boldsymbol{j}} + \delta z\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
\tag{12.82}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_B - \boldsymbol{r}'_A &= (x'_B - x'_A)\hat{\boldsymbol{i}} + (y'_B - y'_A)\hat{\boldsymbol{j}} + (z'_B - z'_A)\hat{\boldsymbol{k}} \\
&= \delta x'\hat{\boldsymbol{i}} + \delta y'\hat{\boldsymbol{j}} + \delta z'\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
\tag{12.83}
$$

质点 A_0 从 A 点到 A' 位置的位移矢量差、质点 B_0 从 B 点到 B' 位置的位移矢量差分别为

$$
\begin{aligned}
\Delta\widetilde{\boldsymbol{U}}_A = \widetilde{\boldsymbol{U}}'_A - \widetilde{\boldsymbol{U}}_A &= (\tilde{u}'_A - \tilde{u}_A)\hat{\boldsymbol{i}} + (\tilde{v}'_A - \tilde{v}_A)\hat{\boldsymbol{j}} + (\tilde{w}'_A - \tilde{w}_A)\hat{\boldsymbol{k}} \\
&= \Delta\tilde{u}_A\hat{\boldsymbol{i}} + \Delta\tilde{v}_A\hat{\boldsymbol{j}} + \Delta\tilde{w}_A\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
\tag{12.84}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\widetilde{\boldsymbol{U}}_B = \widetilde{\boldsymbol{U}}'_B - \widetilde{\boldsymbol{U}}_B &= (\tilde{u}'_B - \tilde{u}_B)\hat{\boldsymbol{i}} + (\tilde{v}'_B - \tilde{v}_B)\hat{\boldsymbol{j}} + (\tilde{w}'_B - \tilde{w}_B)\hat{\boldsymbol{k}} \\
&= \Delta\tilde{u}_B\hat{\boldsymbol{i}} + \Delta\tilde{v}_B\hat{\boldsymbol{j}} + \Delta\tilde{w}_B\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
\tag{12.85}
$$

由于

$$
\begin{cases}
\delta x' - \delta x = (x'_B - x'_A) - (x_B - x_A) = (x'_B - x_B) - (x'_A - x_A) \\
\qquad = [(x'_B - X_B) - (x_B - X_B)] - [(x'_A - X_A) - (x_A - X_A)] \\
\qquad = [\tilde{u}'_B - \tilde{u}_B] - [\tilde{u}'_A - \tilde{u}_A] = \Delta\tilde{u}_B - \Delta\tilde{u}_A \\
\delta y' - \delta y = \Delta\tilde{v}_B - \Delta\tilde{v}_A \\
\delta z' - \delta z = \Delta\tilde{w}_B - \Delta\tilde{w}_A
\end{cases}
\tag{12.86}
$$

所以由(12.82)～(12.85)式得出在 $\Delta t = t' - t$ 期间内质点 A_0 和 B_0 之间距所产生的矢量差为

$$
\begin{aligned}
\Delta(\delta\boldsymbol{r}) = \delta\boldsymbol{r}' - \delta\boldsymbol{r} &= (\delta x' - \delta x)\hat{\boldsymbol{i}} + (\delta y' - \delta y)\hat{\boldsymbol{j}} + (\delta z' - \delta z)\hat{\boldsymbol{k}} \\
&= (\Delta\tilde{u}_B - \Delta\tilde{u}_A)\hat{\boldsymbol{i}} + (\Delta\tilde{v}_B - \Delta\tilde{v}_A)\hat{\boldsymbol{j}} + (\Delta\tilde{w}_B - \Delta\tilde{w}_A)\hat{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
\tag{12.87}
$$

因在 $t = t'$ 时刻，质点 B_0 仍是质点 A_0 附近一点，所以可以将 $\Delta\tilde{u}_B$、$\Delta\tilde{v}_B$、$\Delta\tilde{w}_B$ 在 A 点展开并取一级近似，即

$$\begin{cases}\Delta\tilde{u}_B = \Delta\tilde{u}_A + \left.\dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial x}\right|_A \delta x + \left.\dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial y}\right|_A \delta y + \left.\dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial z}\right|_A \delta z \\ \Delta\tilde{v}_B = \Delta\tilde{v}_A + \left.\dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial x}\right|_A \delta x + \left.\dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial y}\right|_A \delta y + \left.\dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial z}\right|_A \delta z \\ \Delta\tilde{w}_B = \Delta\tilde{w}_A + \left.\dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial x}\right|_A \delta x + \left.\dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial y}\right|_A \delta y + \left.\dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial z}\right|_A \delta z\end{cases} \tag{12.88}$$

于是(12.87)式可写成

$$\Delta(\delta \boldsymbol{r}) = \Delta\mathbf{K} \cdot \delta \boldsymbol{r} \tag{12.89}$$

其中

$$\Delta\mathbf{K} = \{\Delta K_{ij}\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial x} & \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial y} & \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial x} & \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial y} & \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial x} & \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial y} & \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial z} \end{bmatrix}_A \tag{12.90}$$

如下为了方便计,略去下标 A,按照推出习用应变张量的做法,将张量 $\Delta\mathbf{K}$ 作和分解,于是(12.89)式可以写成类似于(12.59)式的形式:

$$\Delta(\delta \boldsymbol{r}) = \Delta\mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{\alpha} \times \delta \boldsymbol{r} \tag{12.91}$$

式中

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{E} = \{\Delta\epsilon_{ij}\} = \{\dfrac{1}{2}(\Delta K_{ij} + \Delta K_{ji})\} \\ = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial x}\right] & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial z} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial x}\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial y}\right] & \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial z} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial y}\right] \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial x} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial z}\right] & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial y} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial z}\right] & \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial z} \end{bmatrix} \\ \Delta\alpha = \Delta\alpha_x\hat{\boldsymbol{i}} + \Delta\alpha_y\hat{\boldsymbol{j}} + \Delta\alpha_z\hat{\boldsymbol{k}} \\ \begin{cases} \Delta\alpha_x = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial y} - \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial z}\right] \\ \Delta\alpha_y = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial z} - \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial x}\right] \\ \Delta\alpha_z = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial x} - \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial y}\right] \end{cases} \end{cases} \tag{12.92}$$

在(12.91)式中,如果令 $\delta\boldsymbol{r} = \delta x\hat{\boldsymbol{i}}$ 且变形只在 x 轴向,则该式变为

$$\Delta(\delta \boldsymbol{r}) = \Delta(\delta x)\hat{\boldsymbol{i}} = (\delta x' - \delta x)\hat{\boldsymbol{i}} = \frac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial x}\delta x\hat{\boldsymbol{i}}$$

即有

$$\frac{\Delta(\delta x)}{\delta x} = \frac{\delta x' - \delta x}{\delta x} = \frac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial x} = \Delta\epsilon_{11}$$

从而看出 $\Delta\epsilon_{11}$ 是 x 轴向线元 δx 沿轴向的自然应变增量;同理,$\Delta\epsilon_{22}$、$\Delta\epsilon_{33}$ 分别为 y 轴向线元

δy、z 轴向线元 δz 沿轴向的自然应变增量。所以，$\Delta\mathbf{E}$ 是自然应变增量张量。它是不包括旋转因素在内的"纯变形"。

在(12.91)式中的最后一项：$\Delta\boldsymbol{\alpha}\times\delta\boldsymbol{r}$ 表示 $\delta\boldsymbol{r}$ 作为刚体旋转的矢量，$\Delta\boldsymbol{\alpha}$ 表示 $\delta\boldsymbol{r}$ 在 Δt 时间内的旋转角。

应变偏量增量张量的定义为

$$\Delta\mathbf{D}=\Delta\mathbf{E}-\frac{1}{3}\cdot\Delta\theta_1\mathbf{I}=\{\Delta e_{ij}\} \tag{12.93}$$

其中

$$\begin{cases}\Delta e_{ij}=\Delta\epsilon_{ij}-\dfrac{1}{3}\cdot\Delta\theta_1\delta_{ij}\\ \Delta\theta_1=\Delta\epsilon_{11}+\Delta\epsilon_{22}+\Delta\epsilon_{33}\end{cases} \tag{12.94}$$

12.5.3 自然应变应变率

自然应变的应变率定义为

$$\dot{\mathbf{E}}=\{\dot{\epsilon}_{ij}\}=\lim_{\Delta t\to t}\frac{\Delta\mathbf{E}}{\Delta t}=\left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\epsilon_{ij}}{\Delta t}\right\} \tag{12.95}$$

据(12.92)式，则有(详细推证，见附录 12.1)

$$\begin{cases}\dot{\epsilon}_{11}=\dfrac{\partial u}{\partial x};\quad \dot{\epsilon}_{22}=\dfrac{\partial v}{\partial y};\quad \dot{\epsilon}_{33}=\dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \dot{\epsilon}_{12}=\dot{\epsilon}_{21}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\\ \dot{\epsilon}_{13}=\dot{\epsilon}_{31}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \dot{\epsilon}_{23}=\dot{\epsilon}_{32}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\end{cases} \tag{12.96}$$

式中的 u、v、w 分别为质点速度矢量的 x 轴向、y 轴向和 z 轴向的分量，于是(12.95)式可写成

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}=\{\dot{\epsilon}_{ij}\}&=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right\}\\ &=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{12.97}$$

这就是自然应变应变率张量，亦称为变形速度张量(关于变形速率张量，详见 3.4 节)。

应变偏量张量的变化率。据(12.93)式，这个变化率为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{D}}=\{\dot{e}_{ij}\}&=\left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta e_{ij}}{\Delta t}\right\}\\ &=\left\{\dot{\epsilon}_{ij}-\frac{1}{3}\dot{\theta}_1\delta_{ij}\right\}=\dot{\mathbf{E}}-\frac{1}{3}\dot{\theta}_1\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{12.98}$$

其中

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_1 &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\Delta\varepsilon_{11}+\Delta\varepsilon_{22}+\Delta\varepsilon_{33}) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \mathrm{div}\boldsymbol{v} \qquad (12.99)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{v} = u\hat{\boldsymbol{i}} + v\hat{\boldsymbol{j}} + w\hat{\boldsymbol{k}}$　为质点的速度矢量

而根据连续介质(不管是流体还是固体)的质量守恒,见(7.14)式,有

$$
\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \dot{\rho} + \rho\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0
$$

于是(12.99)式可写成

$$
\dot{\theta}_1 = -\dot{\rho}/\rho = \dot{V}/V \qquad (12.100)
$$

其中 ρ 为介质密度,$V=\frac{1}{\rho}$ 为比容。利用(12.99)和(12.100)式,$\dot{\mathbf{D}}$ 可写成

$$
\dot{\mathbf{D}} = \{\dot{e}_{ij}\} = \left\{\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\delta_{ij}\right\} = \left\{\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}(\dot{V}/V)\delta_{ij}\right\} \qquad (12.101)
$$

$$
\begin{cases}
\dot{e}_{11} = \dot{\varepsilon}_{11} - \frac{1}{3}\dot{V}/V = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\dot{V}/V \\
\dot{e}_{22} = \dot{\varepsilon}_{22} - \frac{1}{3}\dot{V}/V = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\dot{V}/V \\
\dot{e}_{33} = \dot{\varepsilon}_{33} - \frac{1}{3}\dot{V}/V = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3}\dot{V}/V \\
\dot{e}_{12} = \dot{e}_{21} = \dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
\dot{e}_{13} = \dot{e}_{13} = \dot{\varepsilon}_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\
\dot{e}_{23} = \dot{e}_{32} = \dot{\varepsilon}_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{cases} \qquad (12.102)
$$

由(12.92)的第二式可以给出角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的表达式

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\alpha}}{\Delta t} = \omega_x\hat{\boldsymbol{i}} + \omega_y\hat{\boldsymbol{j}} + \omega_z\hat{\boldsymbol{k}} = \omega_1\hat{\boldsymbol{i}} + \omega_2\hat{\boldsymbol{j}} + \omega_3\hat{\boldsymbol{k}} \\
\begin{cases}
\omega_x = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha_x}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right] = \omega_1 \\
\omega_y = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha_y}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right] = \omega_2 \\
\omega_z = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha_z}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] = \omega_3
\end{cases}
\end{cases} \qquad (12.103)
$$

根据上式给出的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 与速度 $\boldsymbol{v}$ 的关系,得到如下一个重要关系式

$$
\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{v} \qquad (12.104)
$$

12.5.4　应变率和应变导数

物体在变形中,它的每个线元或微元体(即质点,注意在连续介质力学中的质点与理

论力学中所说的质点有所不同，它不但有一定的质量，而且还应视作有“大小”，即有“体积”，其体积还在变化，只是在宏观上极小而已)，都在不断地位移、旋转与变形，不同时刻，它处的方位和形状是不同的。图12.7表示出一个二维体元，在$t=t_n$时刻它处于空间A点。现取两个标架：一个是空间固定标架xy；另一个是“钉在”体元上且随体旋转的标架X_*Y_*，简称“随转标架”。在$t=t_n$时刻两个标架平行，即X_*轴与x轴平行，Y_*轴与y轴平行。到$t=t_{n+1}$时刻，体元由A点移到A'点，不但形状改变，而且还转了一个角度$\Delta\alpha$，随转标架X_*Y_*亦转动$\Delta\alpha$角。

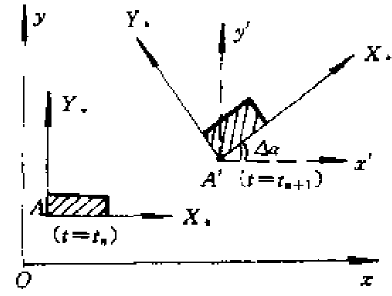


图12.7

在$t=t_n$时刻，体元在固定坐标系oxy中和随转标架X_*Y_*中应变张量均表示为

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_n=\{\varepsilon_{ij}(t_n)\} \tag{12.105}$$

到$t=t_{n+1}$时刻，体元旋转了$\Delta\alpha$角。此刻，体元的应变状态在固定坐标系oxy中和在随转标架X_*Y_*中分别表示为

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_{n+1}=\{\varepsilon_{ij}(t_{n+1})\} \tag{12.106}$$

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}_{n+1}^T=\{\varepsilon_{ij}^T(t_{n+1})\} \tag{12.107}$$

1. 应变导数

作为应变导数，它的定义为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\cdot}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{E}_{n+1}-\mathbf{E}_n}{\Delta t}\\&=\left\{\lim_{t_{n+1}\to t_n}\frac{\varepsilon_{ij}(t_{n+1})-\varepsilon_{ij}(t_n)}{t_{n+1}-t_n}\right\}=\{\varepsilon_{ij}^{\cdot}\}\end{aligned} \tag{12.108}$$

该式即(12.78)式，只是某些符号写法不同而已，其中$\Delta t=t_{n+1}-t_n$。显然，$\mathbf{E}^{\cdot}$并不是$t=t_n$时刻的应变变化率，因为由“张量$\mathbf{E}_n\to$张量$\mathbf{E}_{n+1}$”不仅有变形因素，而且有旋转因素在内，即使体元在由$t_n\to t_{n+1}$时没有变形，则$\mathbf{E}_n$与$\mathbf{E}_{n+1}$亦不同，因体元旋转了(注意，这里所说的$\mathbf{E}_n$与$\mathbf{E}_{n+1}$相同与不同，是指其各个分量ε_{ij}的相同与不同，并不是指代表张量整体的符号$\mathbf{E}$的本身)。

2. 应变率

应变随时间的改变率，即应变率，它是不包含旋转因素在内的“纯应变的变化率”，因此应在随转坐标系中描述，即消除旋转因素，故$t=t_n$时刻的应变率定义作

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}=\{\dot{\varepsilon}_{ij}\}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{E}_{n+1}^T-\mathbf{E}_n}{\Delta t}\\&=\left\{\lim_{t_{n+1}\to t_n}\frac{\varepsilon_{ij}^T(t_{n+1})-\varepsilon_{ij}(t_n)}{t_{n+1}-t_n}\right\}\end{aligned} \tag{12.109}$$

其中$\mathbf{E}_{n+1}^T$是表示将张量$\mathbf{E}_{n+1}$旋转$-\Delta\alpha$角，而$\dot{\mathbf{E}}$既是表述在固定坐标系中，也是表述在随转坐标系中，因在t_n时刻两标架一致。

显然，在一般的情况下 $\dot{\mathbf{E}}$ 与 $\dot{\mathbf{E}}^*$ 是不同的，因

$$\dot{\mathbf{E}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{E}_{n+1}^T - \mathbf{E}_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\mathbf{E}_{n+1}^T - \mathbf{E}_{n+1}) + (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{E}_{n+1}^T - \mathbf{E}_{n+1}}{\Delta t} + \dot{\mathbf{E}}^* \tag{12.110}$$

只有在无旋转时 ($\Delta\alpha = 0$)，应变导数与应变率才相同。

如上的论证虽然是结合二维应变情况，对于三维情况亦完全如此。

12.5.5 应变偏量导数与应变偏量变化率

同理，应变偏量导数与应变偏量变化率亦不同。应变偏量导数：

$$\dot{\mathbf{D}}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{D}_{n+1} - \mathbf{D}_n}{\Delta t}$$

$$= \left\{ \lim_{t_{n+1} \to t_n} \frac{e_{ij}(t_{n+1}) - e_{ij}(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \right\} = \{\dot{\varepsilon}_{ij}^*\}$$

$$= \dot{\mathbf{E}}^* - \frac{1}{3}\dot{\theta}_1^* \mathbf{I} = \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij}^* - \frac{1}{3}\dot{\theta}_1^* \delta_{ij} \right\} \tag{12.111}$$

应变偏量变化率定义为

$$\dot{\mathbf{D}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{D}_{n+1}^T - \mathbf{D}_n}{\Delta t}$$

$$= \left\{ \lim_{t_{n+1} \to t_n} \frac{e_{ij}^T(t_{n+1}) - e_{ij}(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \right\} = \{\dot{e}_{ij}\}$$

$$= \dot{\mathbf{E}} - \frac{1}{3}\dot{\theta}_1 \mathbf{I} = \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\theta}_1 \delta_{ij} \right\} \tag{12.112}$$

应注意，在张量旋转时 θ_1 不变（所谓"不变量"就是这个意思），所以

$$\dot{\theta}_1 = \lim_{t_{n+1} \to t_n} \frac{\theta_1^T(t_{n+1}) - \theta_1(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \lim_{t_{n+1} \to t_n} \frac{\theta_1(t_{n+1}) - \theta_1(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \dot{\theta}_1^* \tag{12.113}$$

12.6 主应变·应变不变量·体膨胀系数

不管是拉格朗日应变、欧拉应变、习用应变，还是自然应变，它们都是二阶对称的笛卡尔张量(symmetric second-order Cartesian tensor)，对于这样的二阶对称张量，同应力张量一样，当然存在主方向和主值(参见 § 2.5)。

然而这种主方向和主值，只有在小变形的情况下才有明显的物理意义。因此我们只按小变形的条件下，引进主方向和主值：

在介质中的某一点上，所谓应变张量的主方向(principal direction)是指在该点的微元体在由纯应变（即不存在刚性旋转）引起变形时，微元体在该方向的方位(orientation)不变，即变形（应变）只发生在该方向（当然，在一点主方向不止一个）。

主应变值(principal strain value)或称应变主值，就是在主方向发生的单位相对位移，即正应变(normal strain)。

12.6.1 相对位移

现考虑在介质变形开始时，有一个质点处在 P_0 点（以 P_0 代表该质点）、在它附近有另

一质点处在 Q_0 点(以 Q_0 代表这个质点),如图 12.8 所示,其中

$$\delta \boldsymbol{R} = \delta X_i \hat{\boldsymbol{e}}_i$$

介质在变形后 ($t = t$ 时刻,或变形结束),质点 P_0 从 $P_0 \to P$ 点,其位移为 $\tilde{U}_{P_0}$;质点 Q_0 从 $Q_0 \to Q$ 点,其位移为 $\tilde{U}_{Q_0}$. 这两个质点的位移差即相对位移(relative displacement)$\mathrm{d}\tilde{U}$ 为

$$\mathrm{d}\tilde{U} = \mathrm{d}\tilde{u}_i \hat{\boldsymbol{e}}_i = \tilde{U}_{Q_0} - \tilde{U}_{P_0} \tag{12.114}$$

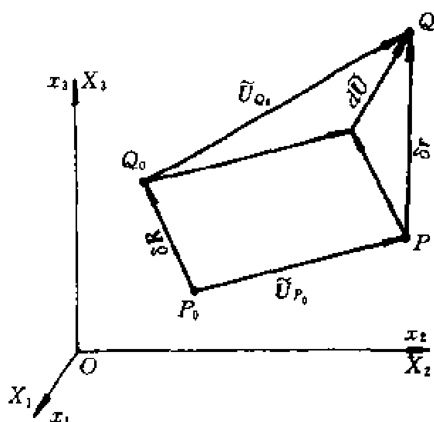


图 12.8

由于我们研究的是小变形,所以两个邻近的质点在变形后其位移差亦很小,所以可把 Q_0 质点的位移 $\tilde{U}_{Q_0}$ 在 P_0 点按泰勒级数展开(Taylor series expansion)并略去高阶项,于是(12.114)式可以写成(参见(12.51)式)

$$\mathrm{d}\tilde{U} = \mathbf{J} \cdot \delta \boldsymbol{R} \quad 或 \quad \mathrm{d}\tilde{U}_i = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} \delta X_j \tag{12.115}$$

将上式两边同除 "$\delta \boldsymbol{R}$ 的长度 δR 后,则给出单位相对位移矢量(unit relative displacement vector):

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\delta R} = \mathbf{J} \cdot \hat{\boldsymbol{l}} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{u}_i}{\delta R} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} \frac{\delta X_j}{\delta R} \tag{12.116}$$

其中

$$\delta R = \sqrt{(\delta X_1)^2 + (\delta X_2)^2 + (\delta X_3)^2} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{l}} = \frac{\delta X_i}{\delta R} \hat{\boldsymbol{e}}_i$$

将 $\mathbf{J}$ 按(12.53)式作和分解,则(12.116)式写成

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\delta R} = (\mathbf{E}^{\blacktriangle} + \mathbf{H}) \cdot \hat{\boldsymbol{l}} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{u}_i}{\delta R} = (E_{ij}^{\blacktriangle} + h_{ij}) \frac{\delta X_j}{\delta R} \tag{12.117}$$

12.6.2 主方向和主值

按应变主方向的定义,在无旋转的情况下(即 $\mathbf{H} = 0$),若单位相对位移矢量 $\mathrm{d}\tilde{U}/\delta \boldsymbol{R}$ 不改变方位,即它与 $\hat{\boldsymbol{l}}$ 共线(collinear),亦即有(见(12.117)式):

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\delta R} = \mathbf{E}^{\blacktriangle} \cdot \hat{\boldsymbol{l}} \equiv \varepsilon \hat{\boldsymbol{l}} \quad 或 \quad E_{ij}^{\blacktriangle} \frac{\delta X_j}{\delta R} \equiv \varepsilon \frac{\delta X_i}{\delta R} \tag{12.118}$$

按定义,$\hat{\boldsymbol{l}}$ 即主方向,ε 即为主值。

在式(12.118)中因 $\hat{\boldsymbol{l}} \neq 0$,故若该式有非平凡解(nontrival solutions),则应有

$$|E_{ij}^{\blacktriangle} - \delta_{ij}\varepsilon| = 0 \quad 或 \quad |\mathbf{E}^{\blacktriangle} - \varepsilon \mathbf{I}| = 0$$

将上式展开可推出关于 ε 的三次方程:

$$\varepsilon^3 - \theta_1 \varepsilon^2 + \theta_2 \varepsilon - \theta_3 = 0 \tag{12.119}$$

其中

$$\begin{cases}\theta_1 = E^{\blacktriangle}_{11} + E^{\blacktriangle}_{22} + E^{\blacktriangle}_{33} = E^{\blacktriangle}_{ii} = \mathrm{tr}\mathbf{E}^{\blacktriangle} \\ \theta_2 = \dfrac{1}{2}(E^{\blacktriangle}_{ii}E^{\blacktriangle}_{jj} - E^{\blacktriangle}_{ij}E^{\blacktriangle}_{ij}) \\ \theta_3 = |E^{\blacktriangle}_{ij}| = \det\mathbf{E}^{\blacktriangle}\end{cases} \tag{12.120}$$

在这里 θ_1、θ_2 和 θ_3 分别称第一、第二和第三应变不变量(first, second and third strain invariants). 从(12.119)式可以解出 ε 的三个根: $\varepsilon_{(1)}$、$\varepsilon_{(2)}$、$\varepsilon_{(3)}$. 与之对应的又可解出三个主方向: $\hat{l}^{(1)}$、$\hat{l}^{(2)}$、$\hat{l}^{(3)}$, 即在介质一点上应变张量存在三个主方向, 这三个方向且正交(参见 §2.6), 而 $\varepsilon_{(1)}$、$\varepsilon_{(2)}$、$\varepsilon_{(3)}$ 为三个主值。

如上考虑的是习用应变张量。当然, 作为二阶对称的拉格朗日有限应变张量、欧拉有限应变张量、自然应变张量亦存在主方向、主值和应变不变量, 不过它们没有习用应变的那样物理意义。

12.6.3 体膨胀系数

习用应变的第一不变量 θ_1 有重要的物理意义. 它为体膨胀系数(cubical dilatation)。

为此, 我们将张量 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 的三个主方向取成坐标轴的方向, 并取一个如图 12.9 所示的矩形体元, 其边长分别为: δX_1、δX_2、δX_3.

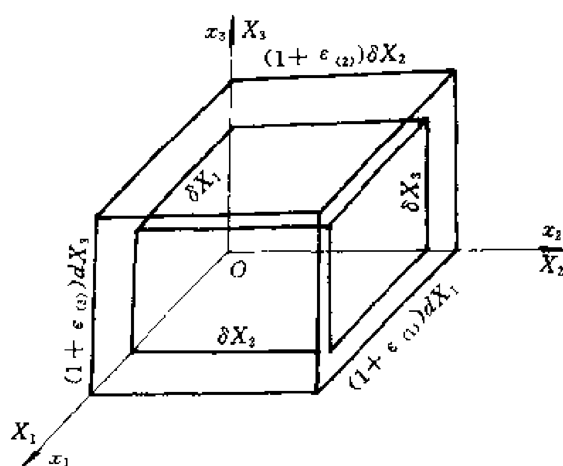


图 12.9

由于 δX_1、δX_2、δX_3 各自处于主方向, 所以它们在变形时不改变方向, 按(12.118)式则有

$$\begin{aligned}\delta \boldsymbol{R}_1 = \delta X_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 \rightarrow \delta \boldsymbol{r}_1 = \varepsilon_{(1)}\delta \boldsymbol{R}_1 + \delta \boldsymbol{R}_1 = (1+\varepsilon_{(1)})\delta X_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 \\ \delta \boldsymbol{R}_2 = \delta X_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 \rightarrow \delta \boldsymbol{r}_2 = \varepsilon_{(2)}\delta \boldsymbol{R}_2 + \delta \boldsymbol{R}_2 = (1+\varepsilon_{(2)})\delta X_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 \\ \delta \boldsymbol{R}_3 = \delta X_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \rightarrow \delta \boldsymbol{r}_3 = \varepsilon_{(3)}\delta \boldsymbol{R}_3 + \delta \boldsymbol{R}_3 = (1+\varepsilon_{(3)})\delta X_3\hat{\boldsymbol{e}}_3\end{aligned} \tag{12.121}$$

在变形前体元的体积

$$\delta V_0 = \delta X_1 \delta X_2 \delta X_3$$

在变形后, 按(12.121)式, 体元的体积

$$\delta V = (1+\varepsilon_{(1)})(1+\varepsilon_{(2)})(1+\varepsilon_{(3)})\delta X_1 \delta X_2 \delta X_3$$

于是得到体积变化率即体膨胀系数 θ_0

$$\theta_0 = \frac{\Delta(\delta V_0)}{\delta V_0} = \frac{\delta V - \delta V_0}{\delta V_0}$$

$$= \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} + (\varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(1)}) + \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} \quad (12.122)$$

而在主轴坐标中应变张量

$$\mathbf{E}^{\blacktriangle} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{(3)} \end{bmatrix}$$

即有

$$\theta_1 = \mathrm{tr}\mathbf{E}^{\blacktriangle} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} \quad (12.123)$$

由于所考虑的为小变形，所以 $\varepsilon_{(1)}$、$\varepsilon_{(2)}$、$\varepsilon_{(3)}$ 均为小量，故在(12.122)式中略去二阶以上的小量后，则推出

$$\theta_0 = \frac{\Delta(\delta V_0)}{\delta V_0} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} = \theta_1 \quad (12.124)$$

由于 θ_1 是不随坐标系改变的不变量，因此有

$$\theta_1 = E^{\blacktriangle}_{11} + E^{\blacktriangle}_{22} + E^{\blacktriangle}_{33} = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} = \theta_0 \quad (12.125)$$

从而说明，在小变形的情况下，θ_1 就是体膨胀系数 θ_0.

12.7 线性应变的协调方程

不管是欧拉线性应变、拉格朗日线性应变，还是习用应变，它们都是位移梯度的线性形式。不过在本书中不再细微区别它们，将它们视作一样，而以习用应变作为这些线性应变的代表。对于习用应变有(见(12.54)式)

$$E^{\blacktriangle}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial X_i}\right) \quad (12.126)$$

由此得知，$E^{\blacktriangle}_{ij}$ 作为 $\bar{u}_i$ 的一阶偏导数或 $\bar{u}_i$ 的一阶偏导数之和，诸 $E^{\blacktriangle}_{ij}$ 当然不能完全随意取任，它们要受"$\bar{u}_i$ 作为多元单值连续函数"的性质制约，即诸 $E^{\blacktriangle}_{ij}$ 之间还应满足一定的关系，例如

$$E^{\blacktriangle}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1}, \quad E^{\blacktriangle}_{22} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_2}, \quad E^{\blacktriangle}_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1}\right)$$

将如上第一式两边同时：$\partial^2/\partial X_2^2$，第二式两边同时：$\partial^2/\partial X_1^2$，然后所求结果相加，再利用如上的第三式，则有

$$\frac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{22}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial X_2^2}\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial X_1^2}\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial X_2 \partial X_1}\left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2}\left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1}\right)$$

$$= 2\frac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \quad (12.127)$$

即找到了 $E^{\blacktriangle}_{11}$、$E^{\blacktriangle}_{22}$、$E^{\blacktriangle}_{12}$ 之间的关系。对于 $E^{\blacktriangle}_{ij}$ 的所有分量而言，按如下方法推出：

对(12.126)式两边同时求 $\partial^2/\partial X_k \partial X_l$，给出：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{ij}}{\partial X_k \partial X_l} &= \frac{\partial^2}{\partial X_k \partial X_l}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j}\right) + \frac{\partial^2}{\partial X_k \partial X_l}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial X_j \partial X_l}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_k}\right) + \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_l}\right)
\end{aligned} \tag{12.128}
$$

将(12.126)式的指标 $i \to k$、$j \to l$ 后，给出

$$
E^{\blacktriangle}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial X_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial X_k}\right)
$$

对上式两边同时求 $\partial^2/\partial X_i \partial X_j$，给出：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{kl}}{\partial X_i \partial X_j} &= \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial X_l}\right) + \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial X_k}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial X_j \partial X_l}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial X_i}\right) + \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial X_j}\right)
\end{aligned} \tag{12.129}
$$

将(12.128)式和(12.129)式相加，则给出

$$
\frac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{ij}}{\partial X_k \partial X_l} + \frac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{kl}}{\partial X_i \partial X_j} = \frac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{ik}}{\partial X_j \partial X_l} + \frac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{jl}}{\partial X_i \partial X_k} \tag{12.130}
$$

这就是线性应变诸分量所满足的关系式，即所谓的**线性应变协调方程**(compatibility equations for linear strains)。

式(12.130)共 81 个方程，但不同的只有 6 个，具体列出为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{11}}{\partial X_2^2} + \dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{22}}{\partial X_1^2} = 2\dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \\
\dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{22}}{\partial X_3^2} + \dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{33}}{\partial X_2^2} = 2\dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} \\
\dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{33}}{\partial X_1^2} + \dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{11}}{\partial X_3^2} = 2\dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} \\
\dfrac{\partial}{\partial X_1}\left(-\dfrac{\partial E^{\blacktriangle}_{23}}{\partial X_1} + \dfrac{\partial E^{\blacktriangle}_{13}}{\partial X_2} + \dfrac{\partial E^{\blacktriangle}_{12}}{\partial X_3}\right) = \dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} \\
\dfrac{\partial}{\partial X_2}\left(\dfrac{\partial E^{\blacktriangle}_{23}}{\partial X_1} - \dfrac{\partial E^{\blacktriangle}_{13}}{\partial X_2} + \dfrac{\partial E^{\blacktriangle}_{12}}{\partial X_3}\right) = \dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} \\
\dfrac{\partial}{\partial X_3}\left(\dfrac{\partial E^{\blacktriangle}_{23}}{\partial X_1} + \dfrac{\partial E^{\blacktriangle}_{13}}{\partial X_2} - \dfrac{\partial E^{\blacktriangle}_{12}}{\partial X_3}\right) = \dfrac{\partial^2 E^{\blacktriangle}_{33}}{\partial X_1 \partial X_2}
\end{cases} \tag{12.131}
$$

如上是从数学上讲，诸 $E^{\blacktriangle}_{ij}$ 间必须满足的关系。从物理上讲，亦要求诸 $E^{\blacktriangle}_{ij}$ 间有一定的约束，不然 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 的 6 个独立分量不加限制地任意指定，则从(12.126) 式可求出位移的偏导数多余 3 个，而从每个位移偏导数，都可求得位移矢量 $\tilde{U}$ 的一个分量，于是根据 $E^{\blacktriangle}_{ij}$ 求得 $\tilde{U}$ 的分量多出三个，但 $\tilde{U}$ 的分量只有三个，从而出现矛盾，给出图 12.10 所示的(c) 或(d) 的情况。即按给定的诸 $E^{\blacktriangle}_{ij}$，从图 12.10(a)所示的初始连续体计算出的变形呈现“分裂”或“重叠”。这是不可能的。因为现在研究的是弹性连续介质体，弹性变形不可能出现分裂，更不可能出现介质重叠，只能出现从图 12.10(a)至图 12.10(b)所示的变形情况。

12.8 弹性材料·广义胡克定律·弹性应变能

所谓**弹性**材料，就是在载荷取消后其变形可以完全复原的材料，这只能发生在小变形

的情况下。

12.8.1 **广义胡克定律**

如下研究无热效应的弹性材料，对于这种简单材料当然满足局部作用原理，于是(5.31)式所示的本构泛函表成

$$\Sigma = \{\sigma_{ij}\} = \tilde{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{F}^t) \tag{12.132}$$

作为弹性材料，应力与应变的关系不依赖变形历史(即无记忆)，于是如上泛函数变成变形梯度 $\mathbf{F}$ 的函数，即成为

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{F}) \tag{12.133}$$

而据变形分析式(12.26)和(12.53)有

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I} = \mathbf{E}^{\blacktriangle} + \mathbf{H} + \mathbf{I} \tag{12.134}$$

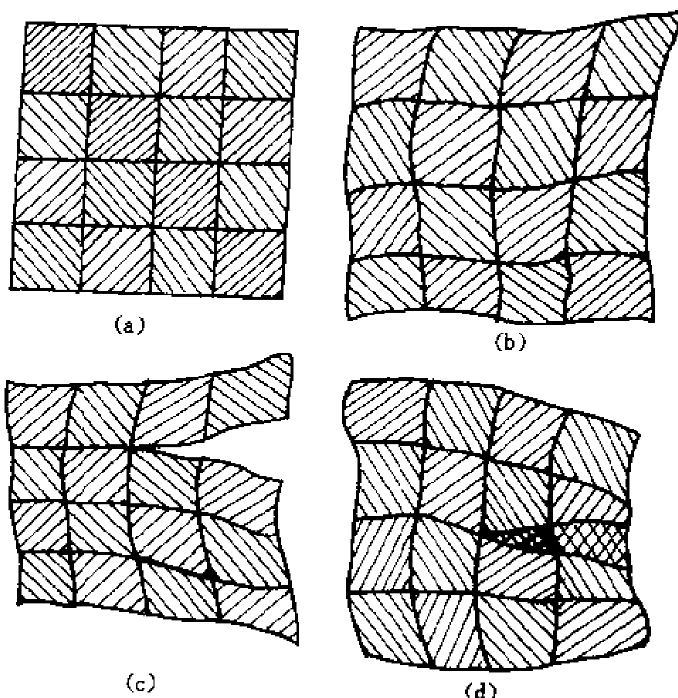


图 12.10

于是(12.133)式写成

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{E}^{\blacktriangle} + \mathbf{H} + \mathbf{I}) \tag{12.135}$$

根据物理实际，质点作刚性旋转不会引起应变，从而不产生应力，而 $\mathbf{I}$ 为常量，故如上的函数成为只作为 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 的函数，即

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{E}^{\blacktriangle}) \tag{12.136}$$

在以下研究中为了方便，将 $\mathbf{E}^{\blacktriangle}$ 写成 $\mathbf{E}$、$E_{ij}^{\blacktriangle}$ 写成 ε_{ij}（同时，对于弹性小变一般不再区别拉格朗日坐标与欧拉坐标，除特别指出)，即

$$\mathbf{E}^{\blacktriangle} = \{E_{ij}^{\blacktriangle}\} \rightarrow \mathbf{E} = \{\varepsilon_{ij}\} \tag{12.137}$$

依据(12.137)式，作为弹性的本构关系(12.136)式写成

$$\Sigma = \Sigma(\mathbf{E}) \quad 或 \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}) \tag{12.138}$$

现在从(12.138)式出发，寻求应力应变的具体函数关系。由于是弹性小变形，应变分量 ε_{kl} 均为小量，于是将(12.138)式在 $\varepsilon_{ij} = 0$ 处泰勒展开(Taylor expansion)，并取一阶小量，则有

$$\sigma_{ij} = \left.\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\right|_{\varepsilon_{kl}=0} \varepsilon_{kl} \tag{12.139}$$

令：

$$C_{ijkl} = \left.\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}\right|_{\varepsilon_{kl}=0}, C = \{C_{ijkl}\} \tag{12.140}$$

于是(12.139)式写成

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad , \Sigma = \mathbf{C} : \mathbf{E} \tag{12.141}$$

上式就是通常所说的线弹性本构关系(constitutive relations for linear elasticity),亦称作广义胡克定律(generalized Hooke's law)。

在上式中,弹性常数张量(tensor of elastic constants) $\mathbf{C}$ 共有 81 个分量(因 C_{ijkl} 的指标 $i、j、k、l$ 的指标域均为 3,即 $i、j、k、l=1,2,3$),但因应力张量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和应变张量 $\mathbf{E}$ 都是对称的二阶张量,即

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}_C \quad \text{或} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \\ \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_C \quad \text{或} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \end{cases} \tag{12.142}$$

根据如上的对称性,可以推出 C_{ijkl} 中只有 36 个是取值不同的。利用这一特点可将(12.141)式改写,为此将应力应变的双指标改为单指标,弹性常数的四个指标变成双指标,其指标域亦由原来的 3 变到 6,具体地,令:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_1 \quad , \quad \sigma_{22} = \sigma_2 \quad , \quad \sigma_{33} = \sigma_3 \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_4 \quad , \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_5 \quad , \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_6 \end{cases} \tag{12.143}$$

即

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{12.144}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 \quad , \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \quad , \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_4/2 \quad , \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_5/2 \quad , \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_6/2 \end{cases} \tag{12.145}$$

即

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{12.146}$$

利用式(12.143)和(12.145),则式(12.141)改写成

$$\sigma_M = C_{MN}\varepsilon_N \tag{12.147}$$

$$(M,N = 1,2,3,4,5,6)$$

这就是对于一般弹性各向异性材料(anisotropic material)常用的胡克定律形式。

12.8.2 弹性应变能

由于我们所研究的是不考虑热效应问题,即为绝热问题,于是由连续介质普遍适用的能量方程(4.58)式得到

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}\mathbf{B}:\boldsymbol{\Sigma} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}B_{ij} \tag{12.148}$$

式中 e—— 为比内能,ρ—— 为密度,$\mathbf{B}$—— 为变形速度张量

$$\mathbf{B} = \{B_{ij}\} \quad , \quad B_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{12.149}$$

(v_i— 为速度分量)

如若现在所研究的应变张量 E 为自然应变，则 $\mathbf{B} = \dot{\mathbf{E}}$（见(12.97) 式）。然而我们所研究的 E 为小应变，即习用应变

$$\mathbf{E} = \{\varepsilon_{ij}\} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i})$$

对上式求物质导数，则有

$$\dot{\mathbf{E}} = \{\dot{\varepsilon}_{ij}\} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i}) \tag{12.150}$$

其中

$$v_i = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}\bigg|_X = \frac{\mathrm{d}\tilde{u}_i}{\mathrm{d}t}$$

而

$$\frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial X_j} + \delta_{kj})$$

由于现在研究的为弹性小变形，故 $\| \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial X_j} \| \ll 1$，所以在上式中略小量，则有

$$\frac{\partial v_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{12.151}$$

于是得到在小变形的情况下同自然应一样，有

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = B_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}) \tag{12.152}$$

因此(12.148)式表成

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}(\frac{\mathrm{d}\mathbf{E}}{\mathrm{d}t}) : \Sigma \quad , \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}t}$$

即有

$$\mathrm{d}e = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \quad 或 \quad \frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij} \tag{12.153}$$

又考虑到在弹性小变形的情况下密度变化很小，即视 $\rho = \text{const}$，于是将(12.141)式代进上式后，可以积分，给出

$$e = \frac{1}{2\rho}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} \tag{12.154}$$

这个比内能函数称作**单位质量的弹性应变能**(elastic strain energy per unit mass)，也就是说**在小变形的情况下，存在弹性应变能函数**。

由于存在如上形式的标量函数，则可由该式推出

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} \equiv C_{klij}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

即有

$$(C_{ijkl} - C_{klij})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \equiv 0$$

如上是个多项式，但诸应变分量 ε_{ij} 却是任取的，从而推出

$$C_{ijkl} = C_{klij} \tag{12.155}$$

即有

$$C_{MN} = C_{NM} \tag{12.156}$$

由于这种对称，使之取值不同的弹性常数由 36 个变成 21 个。现将这些弹性常数表成矩阵为

$$
[C_{MN}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \tag{12.157}
$$

这就是存在弹性应变能情况下，一般弹性各向异性材料的弹性系数矩阵。

12.9 不同对称条件下的弹性常数

上一节给出了在纯力学行为下(存在弹性变形能)的弹性常数(即弹性系数)，共21个独立，这是对于普遍情况，即针对完全各向异性材料。然而，实际的弹性材料往往有些不同的对称性，即非完全各向异性，这时取值不同的弹性系数还可以进一步减少。

12.9.1 各向同性与各向异性概念

如果弹性性质与描述它的坐标系无关，则称这种材料在弹性上是各向同性的(elastically isotropic)；如果材料的弹性性质与描述它的参考系有关，则称这种材料在弹性上是各向异性的，即其弹性性质随方向变化。

12.9.2 具有平面对称的弹性材料

所谓弹性对称平面(plane of elastic symmetry)是材料的弹性性质以这个平面对称，即在以这个平面为对称反射的两个坐标系(如图12.11所示)中所有的对应弹性常数相同。以对称平面反射的两个坐标系的 x_3 与 x_3' 轴向(见图示)称作等价弹性方向(equivalent elastic directions)。图12.11中的 x_1x_2 平面为弹性对称平面，具有这样平面的材料称作平面对称的弹性材料。按图12.11所示的两个坐标系，有

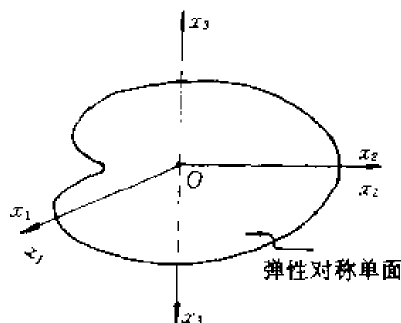


图12.11

$$
x_1' = x_1 \quad , \quad x_2' = x_2 \quad , \quad x_3' = -x_3 \tag{12.158}
$$

据(1.95.2)式，两个坐标系的变换系数 a_{ij} 与坐标之间的关系为

$$
x_i' = a_{ij}x_j \tag{12.159}
$$

于是可求得变换系数张量

$$
\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \{\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{12.160}
$$

利用 $\mathbf{A}$，可以求得应变张量的分量、应力张量的分量在两个坐标系中的关系。在 $ox_1x_2x_3$ 坐标系中表述的应力张量与应变张量分别由式(12.144)和(12.146)给出，于是可给出它们在 $ox_1'x_2'x_3'$ 系中的表述

$$\mathbf{\Sigma}' = \{\sigma'_{ij}\} = \begin{bmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_6 & \sigma'_5 \\ \sigma'_6 & \sigma'_2 & \sigma'_4 \\ \sigma'_5 & \sigma'_4 & \sigma'_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{A}_C$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & -\sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & -\sigma_4 \\ -\sigma_5 & -\sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

即有

$$\begin{cases} \sigma'_1 = \sigma_1, & \sigma'_2 = \sigma_2, & \sigma'_3 = \sigma_3 \\ \sigma'_4 = -\sigma_4, & \sigma'_5 = -\sigma_5, & \sigma'_6 = \sigma_6 \end{cases} \tag{12.161}$$

而

$$\mathbf{E}' = \{\varepsilon'_{ij}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 & \frac{1}{2}\varepsilon'_6 & \frac{1}{2}\varepsilon'_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_6 & \varepsilon'_2 & \frac{1}{2}\varepsilon'_4 \\ \frac{1}{2}\varepsilon'_5 & \frac{1}{2}\varepsilon'_4 & \varepsilon'_3 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}_C$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & -\frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & -\frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ -\frac{1}{2}\varepsilon_5 & -\frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

即有

$$\begin{cases} \varepsilon'_1 = \varepsilon_1, & \varepsilon'_2 = \varepsilon_2, & \varepsilon'_3 = \varepsilon_3 \\ \varepsilon'_4 = -\varepsilon_4, & \varepsilon'_5 = -\varepsilon_5, & \varepsilon'_6 = \varepsilon_6 \end{cases} \tag{12.162}$$

据(12.141)和(12.147)式，以及弹性系数在 $ox_1x_2x_3$ 系与 $ox'_1x'_2x'_3$ 系中等价，则有

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad ,\sigma'_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon'_{kl}$$

或

$$\sigma_M = C_{MN}\varepsilon_N \quad ,\sigma'_M = C_{MN}\varepsilon'_N \tag{12.163}$$

将式(12.161)和(12.162)的结果代入(12.163)的最后一式中，再将所得的结果同(12.163)的第一式比较，则推得

$$\begin{cases} C_{14} = C_{41} = 0, C_{15} = C_{51} = 0, C_{24} = C_{42} = 0, C_{25} = C_{52} = 0 \\ C_{34} = C_{43} = 0, C_{35} = C_{53} = 0, C_{46} = C_{64} = 0, C_{56} = C_{65} = 0 \end{cases} \tag{12.164}$$

于是弹性系数张量的不同分量，由 21 个变成 13 个，即为

$$\mathbf{C} = \{C_{MN}\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, C_{MN} = C_{NM} \tag{12.165}$$

这就是在纯力学效应下，具有平面对称的弹性材料的弹性系数。

12.9.3 **具有正交对称的弹性材料**

如果材料具有三个相互垂直的弹性对称平面，则称这弹性材料为正交各向异性的(orthotropic)。对于这种材料，弹性系数的不同分量，在(12.165)式所示的基础上由13个变成9个，即为

$$\mathbf{C} = \{C_{MN}\} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, C_{MN} = C_{NM} \tag{12.166}$$

当然还有其他一些对称情况下，不再多述。

12.10 各向同性介质的弹性常数

对于各向同性材料而言，在任何一个方向上都是弹性等价的，即材料的弹性性质没有方向性，与描述它的坐标系无关。对于这种材料，其取值不同的弹性系数可以大大减少，由36个变成2个，推出这种结果有几种方法。

12.10.1 **利用坐标变换的方法**

①仿照上节的做法，通过不断地改变坐标系的方位，可在(12.166)式的基础上推出

$$\mathbf{C} = \{C_{MN}\} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{12.167}$$

将这些弹性常数代进式 $\sigma_M = C_{MN}\varepsilon_N$ 中，然后再利用 σ_M 与 σ_{ij} 的关系、ε_N 与 ε_{ij} 的关系式(12.143)和(12.145)，则给出

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{12.168}$$

$$(i = 1,2,3, j = 1,2,3)$$

这就是对各向同性弹料的著名的广义胡克定律。其中 λ 和 μ 为拉梅系数(Lame's constants)。

②利用第六章的附录 6.1 中的(30)式，可以直接给出各向同性材料的弹性常数为

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{12.169}$$

将上式代进(12.141)式中，则给出同(12.168)的形式

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

12.10.2　**按常用的工程方法**

从工程与实验得知，对于各向同性材料，在弹性变形的范围内，其应力应变基本成线性关系。对于简单拉伸，应力 σ 与应变 ε 呈图 12.12 所示的情形，即有简单的胡克定律成立

$$\sigma = E\varepsilon \tag{12.170}$$

其中 E 为杨氏模量(Young's modulus)。

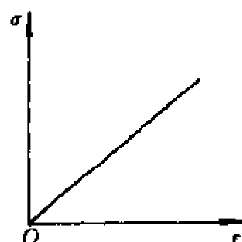


图 12.12

对于各向同性材料而言，在一个方向单独拉伸或压缩(tension or compression)时，在侧向存在着同等的泊松效应(Poisson's effect)。在材料的某一点上，若在 x 向单独作用着应力 σ_{xx}，则在 x 向、y 向和 z 向产生的应变分别为：

$$\begin{cases} \varepsilon'_{xx} = \dfrac{1}{E}\sigma_{xx} \\ \varepsilon'_{yy} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{xx} \\ \varepsilon'_{zz} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{xx} \end{cases}$$

若在 y 向单独作用应力 σ_{yy}，则在 x、y、z 方向产生的应变分别为

$$\begin{cases} \varepsilon''_{xx} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{yy} \\ \varepsilon''_{yy} = \dfrac{1}{E}\sigma_{yy} \\ \varepsilon''_{zz} = -\dfrac{\nu}{E}\sigma_{yy} \end{cases}$$

若在 z 向单独作用应力 σ_{zz}，则在 x 向、y 向、z 向产生的应变分别为

$$\varepsilon'''_{xx} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz}$$

$$\varepsilon'''_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz}$$

$$\varepsilon'''_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz}$$

如果在 x、y、z 三个互相垂直的方向上同时分别作用 σ_{xx}、σ_{yy}、σ_{zz}，结果在这三个方向上所产生的总应变，根据以上三式，则有

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xx} + \varepsilon'''_{xx} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
\varepsilon_{yy} = \varepsilon'_{yy} + \varepsilon''_{yy} + \varepsilon'''_{yy} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
\varepsilon_{zz} = \varepsilon'_{zz} + \varepsilon''_{zz} + \varepsilon'''_{zz} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]
\end{cases}
$$

其中，ν为泊松比(Poisson's ratio)。

在各向同性固体介质中，法向应力只产生法向应变，如上面所述；面切向应力只产生切向应变，切向应力与切向应变的关系如下：

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{xy} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{yx} \\
\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{zx} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{xz} \\
\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{yz} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{zy}
\end{cases}
$$

其中，G 为剪切模量(shear modulus)。

综上所述，对于在弹性范围内的各向同性介质的应力应变关系为

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xx} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\
\varepsilon_{yy} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \\
\varepsilon_{zz} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \\
\varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{xy}, \varepsilon_{yz} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{yz}, \varepsilon_{zx} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{zx}
\end{cases}
\tag{12.171}
$$

将上式改写成应力作为应变的函数并表成张量形式(即(12.168)式)，即为

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\sigma_{ij}$$

关于 μ、λ 与 E、G、ν 的关系见下面。

12.10.3 拉梅系数与工程系数的关系·体积模量

在广义胡克定律中出现的拉梅系数 μ 和 λ，它们同工程常数 ν、E 和 G 的关系，可以这样得到：将(12.168)式用到简单拉情况，于是便给出

$$
\begin{cases}
E = 2\mu + \lambda(1 - 2\nu) \\
0 = -2\mu\nu + \lambda(1 - 2\nu)
\end{cases}
$$

解出

$$
\begin{cases}
\lambda = \dfrac{E\nu}{(1 + \nu)(-2\nu)} \\
\mu = \dfrac{E}{2(1 + \nu)}
\end{cases}
\tag{12.172}
$$

再将(12.168)式用于剪切分量，则有

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, (i \neq j)$$

再由(12.171)式，则推出

$$G = \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{12.173}$$

根据平均应力即流体静压力 p 的定义(2.119)式、应力偏量的定义(2.120)式和应变偏量的定义(12.75)或(12.77)式,有

$$\begin{cases} p = -\dfrac{1}{3}\sigma_{kk} = -\dfrac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) = -\sigma_m \\ s_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \dfrac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \dfrac{1}{3}\theta_t\delta_{ij} \end{cases} \tag{12.174}$$

由上式和广义胡克定律(12.168)式,可以推出

$$\begin{cases} p = -K\theta_t = -K\varepsilon_{kk} \\ s_{ij} = 2Ge_{ij} \end{cases} \tag{12.175}$$

其中 K 为体积模量(bulk modulus)

$$K = \lambda + \frac{2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{12.176}$$

表 12.1 列出几种常用固体材料的 E、ν、G 值,关于 K 值,详见附表 12.1。

表 12.1

名　　称	$E(\mathrm{kg/cm^2})$	$G(\mathrm{kg/cm^2})$	$K(\mathrm{kg/cm^2})$	ν
铸　　铁	$(0.95\sim1.5)\times10^6$	$(0.37\sim0.58)\times10^6$	$(0.6\sim1.1)\times10^6$	$0.21\sim0.30$
碳　　钢	$(2.0\sim2.1)\times10^6$	0.81×10^6	$(1.6\sim1.7)\times10^6$	$0.24\sim0.29$
硬铝合金	0.71×10^6	0.27×10^6	0.71×10^6	0.33
压 延 铜	1.1×10^6	0.4×10^6	1.26×10^6	$0.31\sim0.34$
玻　　璃	0.56×10^6	0.22×10^6	—	0.25

(表中的:kg 是指公斤力,或写成:kgf)

泊松比 ν 一般:$0<\nu<1/2$;对于金属 ν:在 $1/4\sim1/3$ 之间;对于不可压缩材料:$\nu=1/2$。

12.10.4　考虑热效应的弹性本构关系

如果材料受到热的作用,特别是温度分布不均匀,那么在应力应变关系中还必须考虑温度效应。对于各向同性介质而言,温度所产生的应变只是正应变,不产生切应变,于是考虑温度的弹性本构关系(参照(12.171)式)可写成

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})] + \alpha_0(T-T_0) \\ \varepsilon_{yy} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})] + \alpha_0(T-T_0) \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})] + \alpha_0(T-T_0) \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{yz}, \quad \varepsilon_{zx} = \dfrac{1}{2G}\sigma_{zx} \end{cases} \tag{12.177}$$

其中 α_0 为线膨胀系数,T 为温度,T_0 为初始温度。

若将上写成张量形式(参照(12.168)式),为

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + [\lambda\varepsilon_{kk} - \alpha_0(3\lambda+2\mu)(T-T_0)]\delta_{ij}$$

应注意,在本节的论述中为了方便起见,尽管应变均写成 ε_{xx}、ε_{yy}、…,但它们不一定只

表示自然应变张量的分量，亦可代表工程应变(即习用应变)张量的分量ε_{xx}、ε_{yy}、…，如上所做，在以下的论述中也是如此，除非特别指明。

12.11 弹性力学问题·叠加原理·圣维南法则

作为弹性问题：① 小变形，采用习用应变；② 除非特别指出(如在应力波理论中)，一般不再区别空间坐标与物质坐标；③ 视密度不变，即$\rho=\text{const}$. 以上这些就是我们研究弹性问题的出发点。同时，假定介质是均匀各向同性的。

12.11.1 弹性静力学问题

所谓弹性静力学问题(clastostatic problem)是指在所研究的问题中$\boldsymbol{v}=0$。由于$\boldsymbol{v}=0$，从连续性方程可以推出$\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t=0$，即$\rho=\text{const}$是准确成立的并非近似。弹性静力学问题就是静力平衡问题，它不考虑变形过程只考虑变形终止状态。

1. *弹性静力学问题的控制方程组*

①平衡方程(equilibrium cquations)。据(4.25)式，有

$$\sigma_{ji,j}+\rho b_i=0 \quad \text{或}\ \nabla\cdot\Sigma+\rho\boldsymbol{b}=0 \tag{12.178}$$

②胡克定律(Hooke's law)。据(12.168)式，有

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{或} \quad \Sigma=\lambda\theta_1\mathrm{I}+2\mu\Sigma \tag{12.179}$$

③应变与位移的关系。据(12.46)式，有

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial X_j}+\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial X_i}\right) \quad \text{或} \quad \mathrm{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial X_j}+\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial X_i}\right)\hat{e}_i\hat{e}_j$$

由于小变形，略去空间坐标与物质坐标的差别，改用空间坐标，于是上式表成

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right) \quad \text{或} \quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j}+\tilde{u}_{j,i}) \tag{12.180}$$

如上共15个独立方程、15个未知函数(6个应力分量、6个应变分量、3个位移分量、而体力$\boldsymbol{b}$是已知的)，所以方程组封闭，可以求解。

2. *弹性静力学问题的边界条件(boundary conditions)*

如上的方程组虽然可以求解，但要得到确定的解，还需要定解条件。作为弹性静力学问题的边界条件分成三种类型：

①在所研究的弹性体表面(边界)上给出位移分布；

②在所研究的弹性体表面(边界)上给出应力分布；

③在所研究的弹性体的表面(边界)的一部分给出位移；而在其另一部分上给出应力分布。

3. *对于给出位移边界条件的弹性静力学问题*

设在边界上给出位移为

$$\tilde{u}_i=g_i(x_1,x_2,x_3) \quad \text{或} \quad \tilde{U}=g(\boldsymbol{r}) \tag{12.181}$$

因边界上给出的是位移，所以将控制方程组(12.178)、(12.179)、(12.180)化成只含位移形式，以方便定解，即有

$$\mu\tilde{u}_{i,jj}+(\lambda+\mu)\tilde{u}_{j,ji}+\rho b_i=0 \tag{12.182.1}$$

或

$$\mu\nabla^2\tilde{U} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\tilde{U}) + \rho b = 0 \qquad (12.182.2)$$

式(12.182.1)或(12.182.2)称作纳维—哥西方程(Navier-Cauchy equations)。

4. 对于给出应力边界条件的弹性静力学问题

设在边界上给出应力为

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ij}n_j = h_i(x_1,x_2,x_3) \quad 或 \quad t^{(\hat{n})} = \Sigma\cdot\hat{n} \equiv h(r) \qquad (12.183)$$

将方程(12.178)、(12.179)、(12.180)化成只含应力的方程为

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j}+b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu}b_{k,k}\rho\delta_{ij} = 0 \qquad (12.184.1)$$

或

$$\nabla^2\Sigma + \frac{1}{1+\nu}\nabla\nabla\,\mathrm{I}_\Sigma + \rho[\nabla b + (\nabla b)_c] + \frac{\nu}{1-\nu}(\nabla\cdot b)\rho\mathbf{I} = 0$$

(12.184.2)

式(12.184.1)或(12.184.2)称作拜尔脱拉密—密乞尔相容性方程(Beltrani-Michell equations of compatibility)。$\mathrm{I}_\Sigma = \sigma_{kk}$，为应力张量第一不变量

12.11.2 弹性动力学问题

所谓弹性动力学问题(elastodynamic problems)，是指所研究的弹性变形问题有速度变化，但变形较小，属于弹性范围(如若动态大变形，那属于流体弹塑性问题，将在后面处理)。对于这样的问题，除了像在弹性应力波理论中那样精细地研究之外，一般略去空间坐标与物质坐标的差别且认为 $\rho=\text{const}$。据(4.24)、(12.179)、(12.180)式，则有

$$\begin{cases}\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho\dot{v}_i \quad 或 \quad \nabla\cdot\Sigma + \rho b = \rho\dot{v} \\ \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad 或 \quad \Sigma = \lambda\theta_1\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j}+\tilde{u}_{j,i}) \quad 或 \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}[\nabla\tilde{U} + (\nabla\tilde{U})_c]\end{cases} \qquad (12.185)$$

再考虑到速度与位移的关系

$$v_i = \dot{\tilde{u}}_i \quad 或 \quad v = \dot{\tilde{U}} \qquad (12.186)$$

式(12.185)和(12.186)共18个方程，未知函数亦为18个，方程组封闭可解。当然所求的解除了满足边界条件外，还要满足初始条件(initial conditions)。

如若将如上动力学方程组化成位移方程为

$$\rho\tilde{u}_{i,jj} + (\lambda+\mu)\tilde{u}_{j,ji} + \rho b_i = \rho\ddot{\tilde{u}}_i \qquad (12.187.1)$$

或

$$\mu\nabla^2\tilde{U} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\tilde{U}) + \rho b = \rho\ddot{\tilde{U}} \qquad (12.187.2)$$

其边初条件为

$$\tilde{u}_i = g_i(x_1,x_2,x_3,t) \quad 或 \quad \tilde{U} = g(r,t) \qquad (12.188)$$

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i(x_1,x_2,x_3,0) \quad 或 \quad \tilde{U} = \tilde{U}(r,0) \qquad (12.189)$$

12.11.3 叠加原理

由于线弹性的控制方程(12.185)及(12.187)式是线性的，所以方程组的解可以叠加，即叠加原理(principle of superposition)成立。

例如，在(12.185)式中，当 $b_i = b_i^{(1)}$ 时，方程的解为：$\tilde{u}_i^{(1)}$、$\sigma_{ij}^{(1)}$、$\varepsilon_{ij}^{(1)}$，即它们满足

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^{(1)} + \rho b_i^{(1)} - \rho \ddot{\tilde{u}}_i^{(1)} = 0 \\ \sigma_{ij}^{(1)} = \lambda \varepsilon_{kk}^{(1)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(1)} \\ \varepsilon_{ij}^{(1)} = \dfrac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j}^{(1)} + \tilde{u}_{j,i}^{(1)}) \end{cases} \tag{12.190.1}$$

而在(12.185)式中，当 $b_i = b_i^{(2)}$ 时，其解为：$\tilde{u}_i^{(2)}$、$\sigma_{ij}^{(2)}$、$\varepsilon_{ij}^{(2)}$，即它们满足

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^{(2)} + \rho b_i^{(2)} - \rho \ddot{\tilde{u}}_i^{(2)} = 0 \\ \sigma_{ij}^{(2)} = \lambda \varepsilon_{kk}^{(2)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(2)} \\ \varepsilon_{ij}^{(2)} = \dfrac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j}^{(2)} + \tilde{u}_{j,i}^{(2)}) \end{cases} \tag{12.190.2}$$

将(12.190.1)式与(12.190.2)式相加，给出

$$\begin{cases} (\sigma_{ji,j}^{(1)} + \sigma_{ji,j}^{(2)}) - \rho(\ddot{\tilde{u}}_i^{(1)} + \ddot{\tilde{u}}_i^{(2)}) + \rho(b_i^{(1)} + b_i^{(2)}) = 0 \\ (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) = \lambda(\varepsilon_{kk}^{(1)} + \varepsilon_{kk}^{(2)})\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \\ (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) = \dfrac{1}{2}[(\tilde{u}_{i,j}^{(1)} + \tilde{u}_{i,j}^{(2)}) + (\tilde{u}_{j,i}^{(1)} + \tilde{u}_{j,i}^{(2)})] \end{cases} \tag{12.191}$$

如若在(12.185)中 $b_i = b_i^{(1)} + b_i^{(2)}$，其方程的解为：$\tilde{u}_i$、$\sigma_{ij}$、$\varepsilon_{ij}$，即它们满足

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j} - \rho \ddot{\tilde{u}}_i + \rho(b_i^{(1)} + b_i^{(2)}) = 0 \\ \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \end{cases} \tag{12.192}$$

将(12.191)式与(12.192)式相比较，则推出

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i^{(1)} + \tilde{u}_i^{(2)}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \tag{12.193}$$

从而说明方程组的解可以相加，即叠加原理成立。

12.11.4 圣维南法则

圣维南法则(Saint-Venant's principle)：对于作用在弹性物体的某个局部边界上两个独立的、但在静力学上是等价的(合力相等、合力矩相等)力系，所造成的差别只限于在离载荷作用较近的地方；而在离载荷作用处较远的地方，由这两种等价载荷所造成的应力应变的差别可以忽略。

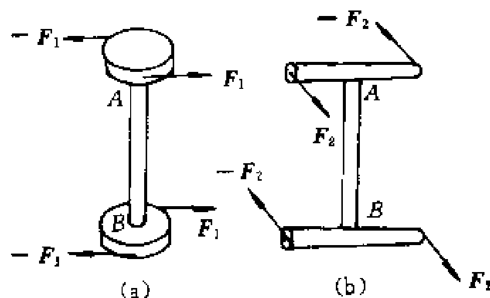


图 12.13

例如图 12.13 所示的杆 AB 受力情况，第一次杆受力如图(a)所示；第二次杆受力如图(b)所示。只要这两次作用力矩相等(因它们的合力为零，自然相等)，则在 AB 杆的中部所产生的应力和应变几乎一样。

圣维南原理对解决实际问题非常有用，但至今未得到理论证明。

12.12 塑性·屈服条件与加载准则

物体在外力的作用下发生变形，当外力取消时其变形可以恢复原状，这就是弹性变形；而当外力去掉后，变形不能完全恢复原状，这就是塑性变形。同一个物体或者说同材料，什么时候发生弹性变形，什么时候发生塑性变形，这与作用外力有关。

随着作用力的增加，应变亦在不断增加，在变形较小时，应力应变成线性关系，即所谓线弹性，如上面所述。但变形增加到一定程度，这种线性关系消失，应力应变成非线性关系，从线性到非线性的分界点称作比例极限。从比例极限再增加，一直增加到若材料完全卸载（去掉应力）后仍能完全恢复原形的上界，这个上界称作弹性极限。对于一般材料而言，比例极限与弹性极限相差很小，所以把它们统称为弹性极限或屈服极限（yield limit）。

这里所说的屈服极限是指材料变形从弹性到塑性的第一次屈服极限，又称作初始屈服极限。

从屈服极限再增加应变，则材料卸载后将不能完全恢复，留有残余变形（residual deformation）。

12.12.1 屈服曲面（yield surface）

在材料中一点的应力状态由应力张量 Σ 决定，由于介质在无分布力矩的情况下 Σ 是对称的：$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，故在介质中一点的应力状态实际上是由 σ_{ij} 中六个独立的分量决定的。

现在以应力张量的六个独立分量为坐标轴引进一个六维空间，材料中各质点的应力状态就是借此空间来表示，质点的一种应力状态则对应该空间中的一个点。若一个质点的应力状态从自然态（零状态，它对应坐标原点）开始连续地变化到刚出现塑性为止，则这些应力状态对应着应力空间的一个区域（包括原点在内的一个区体），这个区域的外表面就是屈服面，现记作：

$$f(\sigma_{ij})=0$$

然而，一质点的某种应力状态，可以由它的三个不变量 I_Σ、II_Σ、III_Σ 决定，尽管坐标系标轴取向不同应力张量的分量就不同，但应力状态决不因坐标架方向变了而改变。应力状态定了，不变量就完全定了，任何坐标方位下的张量分量 σ_{ij} 则可完全确定，所以屈服面又可表成：

$$f(\mathrm{I}_\Sigma、\mathrm{II}_\Sigma、\mathrm{III}_\Sigma)=0$$

或

$$f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=0 \tag{12.194}$$

其中 σ_1、σ_2、σ_3 为主应力，又因为在压力 p 不太高（如小于五倍的屈服应力）的情况下，材料的屈服只与应力偏量 S_{ij} 有关，与压力 p 无关，按照上面所述的同样理由，屈服面又可表成：

$$f(S_1,S_2,S_3)=0 \quad 或 \quad f(\mathrm{I}_D、\mathrm{II}_D、\mathrm{III}_D)=0$$

然而应力偏量第一不变量 $\mathrm{I}_D\equiv 0$（关于不变量 II_D 和 III_D，见式(2.125)和(2.126)），故屈服面又可表成如下形式

$$f(\mathrm{II}_D、\mathrm{III}_D)=0 \tag{12.195}$$

如上所述的各种抽象形式的屈服面，即屈服条件，若表成具体形式很复杂，使用起来

也不方便，故常用简化的屈服准则。

12.12.2 **常用的屈服准则**(yield criteria in common use)

常用的屈服准则(即屈服条件)有两个，它们都是如上屈服条件的近似。

1. *屈斯卡准则*(Tresca yield criterion)

该屈服准则是：当最大切应力 $\tau_{\max}$ 达到一定程度，如等于 $\frac{1}{2}Y$(其中 Y 为简单拉伸时材料的屈服应力) 时，材料屈服。亦即满足下式材料屈服(在 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 的约定下)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}Y \tag{12.196}$$

即写成

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y \tag{12.197}$$

在简单拉伸情况下，即

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

则由(12.197)式推出材料达到初始屈服时，应力 σ 为

$$\sigma = Y \tag{12.198}$$

在纯剪情况下，即：

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad \sigma_2 = 0, \qquad \sigma_3 = -\sigma$$

则由(12.197)式推出材料达到初始屈服时，应有

$$\sigma = \frac{1}{2}Y \tag{12.199}$$

这个准则是 1864 年法国工程师屈斯卡(Trèsca)提出来的，它很简单，不管应力状态如何复杂，只要衡量其最大剪应力 $\tau_{\max}$(亦即最大主应力 σ_1 和最小主应力 σ_3) 满足一定条件，即可判断材料屈服。屈服限 Y 可以通过简单拉伸或纯剪等实验简单确定。

该准则显然是普遍准则的一种简化，即相当在(12.194) 式中不考虑第二主应力 σ_2 的影响。实验证明 σ_2 是有影响的，只是在一般情况下影响不算太大而已。

2. *密赛斯准则*(Mises yield criterion)

1913 年冯·密赛斯(von Mises)改进了屈斯卡准则，提出了一个简单实用的准则，即所谓的密赛斯屈服准则，它的形式为

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = 3\,\mathrm{I\!I}_D = Y^2 \tag{12.200}$$

即当**应力强度** σ_I 或者说应力状态满足上式时，材料达到屈服。

该准则可以看作**最大畸变能准则**，即畸变能 W_D 达到一定值时材料屈服。畸变能(distortion energy)

$$W_D = \int_0^{(e_{ij})} S_{ij}\mathrm{d}e_{ij} = \frac{1}{4G}S_{ij}S_{ij} = \frac{1}{2G}\,\mathrm{I\!I}_D \tag{12.201}$$

将上式代进(12.200)式中，则推出

$$W_D = \frac{1}{6G}Y^2 \tag{12.202}$$

即当畸变能 W_D 满足上式时，材料屈服。

这个准则又可看作剪切强度(shear intensity) τ_T 的屈服准则，τ_T 的定义为

$$\tau_T = \sqrt{\frac{2}{3}(\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2)} \tag{12.203}$$

其中

$$\begin{cases} \tau_1 = \pm \dfrac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \pm \dfrac{1}{2}(s_1 - s_2) \\ \tau_2 = \pm \dfrac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \pm \dfrac{1}{2}(s_2 - s_3) \\ \tau_3 = \pm \dfrac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \pm \dfrac{1}{2}(s_3 - s_1) \end{cases} \tag{12.204}$$

根据如上两式和(12.200)式，得出

$$\tau_T = \frac{1}{\sqrt{3}}Y \tag{12.205}$$

即剪切强度 τ_T 满足上式时，材料屈服。

将密赛斯准则用于简单拉伸情况，即当

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

则由(12.200)式得出材料屈服时

$$\sigma = Y \tag{12.206}$$

将密赛斯准则用于纯剪情况，即当

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad \sigma_2 = 0, \qquad \sigma_3 = -\sigma$$

则由(12.200)式得出材料屈服时

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}Y \approx \frac{1}{1.73}Y \tag{12.207}$$

屈斯卡准则和密赛斯准则一般是不同的，如在纯剪的情况下，两个准则得到的屈服应力 σ 是不同的，但差异不太大，见(12.199)和(12.207)式。只有在特殊情况下二者相同，如在一维应变和一维应力的情况下二者相同。

密赛斯准则是屈斯卡准则的改进。它更符合一般的屈服条件，式(12.200)则相当于式(12.194)，只是 σ_1、σ_2、σ_3 以特殊形式"差值"出现而已；它当然亦相当于在一般屈服条件式(12.195)中不考虑 $\mathrm{I\!I\!I}_D$ 的特殊情形。由于密赛斯准则简单又较准确，所以实际应用中一般均使用它。

在许多论著中，经常提到**密赛斯屈服函数** f_m（在后面，我们亦将使用它），它是根据(12.200)式定义的。

$$\begin{aligned} f_m &= f(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_3 - \sigma_1) \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = \mathrm{I\!I}_D = \frac{1}{3}Y^2 \end{aligned} \tag{12.208}$$

亦有据(12.200)式，把密赛斯屈服函数 F_m 定义成

$$F_m = F_m(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = f_m - \mathscr{K}^2 = \mathrm{I\!I}_D - \mathscr{K}^2 \tag{12.209}$$

其中 $\mathscr{K} = \mathscr{K}(\varepsilon_{ij}^p) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}Y$， $Y = Y(\varepsilon_{ij}^p)$，见(12.212)式。

12.12.3 **硬化问题**(hardening problems)

上面所述的屈服条件是材料从弹性初次进入塑性的初始屈服条件，式中所出现的 Y 应为简单拉伸初始屈服应力 Y_0，作为初始屈服条件，式(12.197)和(12.200)应写成：

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y_0, \qquad Y_0 = \mathrm{const} \tag{12.210}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2] = 3J_D = Y_0^2 \tag{12.211}$$

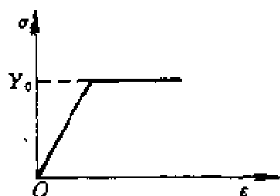


图 12.14 理想塑性简单拉伸时的应力应变关系曲线

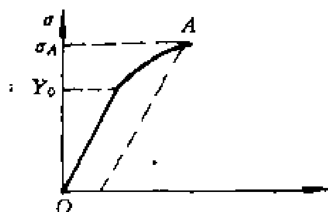


图 12.15 非理想塑性简单拉伸时的应力应变关系曲线

对于理想塑性材料，材料达到初始屈服后，变形再继续，屈服条件不变，即如上两式仍然成立。对于理想塑性(perfect plasticity)，简单拉伸时的应力应变曲线如图 12.14 所示。如果材料为非理想塑性，即硬化材料，则情形不同。如图 12.15 所示，在简单拉伸情况下，当应力增加到 $\sigma = Y_0$ 而进入塑性后，应力 σ 随应变 ε 增加而增加。当变形在图 12.15 所示状态 A 点卸载，如再重新加载，材料的屈服应力不再是 Y_0，而是增加成为 σ_A，即 $Y = \sigma_A$，即发生了硬化。

对于各向同性硬化材料，屈服准则式(12.197) 和(12.200) 中的 Y 不再是常数，它与应变历史有关，Y 成为随塑性变形增加面增加的瞬态应变函数，其硬化模型如图 12.16 所示。

图 12.16 所画的屈服面为密赛斯屈服面和屈斯卡屈服面在 π 平面上的投影。所谓 π 平面就是在以三个主方向为标轴的应力空间中，过原点、其法线与三个标轴成等角的那个平面。图中 $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ 分别为主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 在 π 平面上的投影。

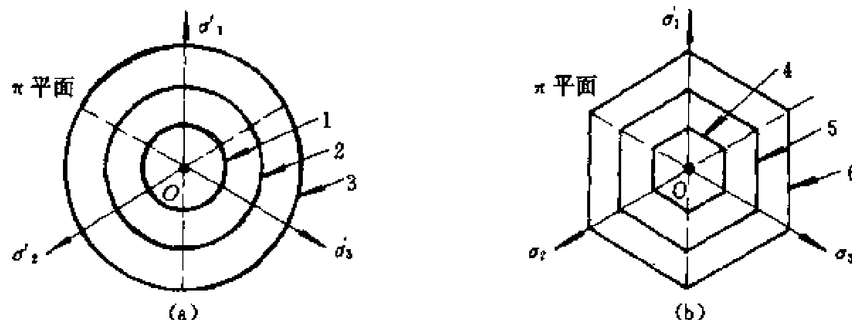


图 12.16 各向同性硬化屈服面

1- 初始密赛斯屈服面；2 和 3- 瞬态密赛斯屈服面；4- 初始屈斯卡屈服面；5 和 6- 瞬态屈斯卡屈服面

Y 作为何种量函数的取法多种多样，例如：

① 将 Y 作为应变 ε_{ij} 或应变强度 ε_I 的函数，即

$$Y = Y(\varepsilon_{ij}) \quad 或 \quad Y = Y(\varepsilon_I) \tag{12.212}$$

其中

$$\varepsilon_I = \frac{\sqrt{2}}{3}[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 6(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)]^{1/2} \tag{12.213}$$

②将 Y 作为塑性应变 ε_{ij}^P 或塑性应变强度 ε_I^P 的函数，即

$$Y = Y(\varepsilon_{ij}^P) \quad 或 \quad Y = Y(\varepsilon_I^P) \tag{12.214}$$

其中

$$\varepsilon_I^P = \frac{\sqrt{2}}{3}[(\varepsilon_{xx}^P - \varepsilon_{yy}^P)^2 + (\varepsilon_{yy}^P - \varepsilon_{zz}^P)^2 + (\varepsilon_{zz}^P - \varepsilon_{xx}^P)^2 + 6(\varepsilon_{xy}^P)^2 + 6(\varepsilon_{yz}^P)^2 + 6(\varepsilon_{zx}^P)^2]^{1/2} \tag{12.215}$$

在这里是按经典作法，将应变 ε_{ij} 分成两部分，为弹性应变 ε_{ij}^e 和塑性应变 ε_{ij}^P 之和，即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^P \tag{12.216}$$

③将 Y 作为塑性变形功 W_P 的函数，即

$$Y = Y(W_P) \tag{12.217}$$

其中

$$W_P = \int_0^{(\varepsilon_{ij}^P)} \sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P$$

④在动态大变形（流体弹塑性情形）中，Y 则作为温度 T 和压力 p 的函数，即

$$Y = Y(p, T) \tag{12.218}$$

当然，Y 函数的取法还有其他形式，这些取法并不是完全等价的。它们都是从不同角度反映硬化效应的。

除了各向同性硬化模型外，还有反映鲍辛格效应(Bauschinger's effect)的随动硬化模型等。

12.12.4 **加载准则**(loading criterion)

材料达到屈服后，加载和卸载的应力应变规律不同，这说明塑性应力应变关系与载荷密切相关，因此必须有一个准则判断，以判断在什么条件下是加载状态，在什么条件下为卸载状态。

在简单拉伸下，容易判断。对于硬化材料，加载拉伸 $\mathrm{d}\sigma > 0$；加载压缩 $\mathrm{d}\sigma < 0$；拉伸状态下，卸载 $\mathrm{d}\sigma < 0$；压缩状态下，卸载 $\mathrm{d}\sigma > 0$. 于是，加载准则可表示为

$$\begin{cases} \sigma \mathrm{d}\sigma > 0 & \text{加载；服从塑性应力应变规律} \\ \sigma \mathrm{d}\sigma < 0 & \text{卸载；应力应变按弹性卸载规律} \\ \sigma \mathrm{d}\sigma = 0 & \text{载荷不变} \end{cases} \tag{12.219}$$

在复杂应力状态下，则根据屈服函数来判断，加载准则表示为

$$
\begin{cases}
df_m = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_i}d\sigma_i = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}d\sigma_{ij} > 0 & \text{加载} \\
df_m = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_i}d\sigma_i = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}d\sigma_{ij} < 0 & \text{卸载} \\
df_m = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_i}d\sigma_i = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}d\sigma_{ij} = 0 & \text{中性变载}
\end{cases}
\tag{12.220}
$$

12.13 塑性变形的微观机制

从微观的角度来看，物质是由原子组成的，作为固体材料之所以能保持一定的形状，是因组成固体材料的原子之间存在着相互平衡的力，即引力和斥力达到平衡。这些原子按着一定的点阵排列，形成如图 12.17 所示晶格(crystal lattice)。

当物体受到外力作用时，外力改变了介质原子排列的原先格局，晶格原子间距发生了变化，原子间的相互作用力达到新的平衡。

如果在外力作用下物体的晶体点阵没有改变基本排列形式，如图 12.17(b)所示，当外力去掉后，各原子又恢复到原先最小的稳定平衡位置，如图 12.17(a)所示，即物体又恢复了原形，这种变形则为弹性变形。

如果物体在外力作用下，变形超过弹性达到了塑性，从微观角度看，则是晶格的一部分相对另一部分形成了“滑动”位移，改变了晶体点阵的排列形式，如图 12.18(b)所示。当外力去掉时，各原子不能恢复到原来的位置，所以物体产生了永久的变形，即产生了残余变形。实验证明：滑移是塑性变形的基本机理。

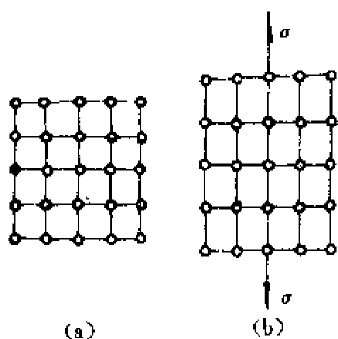


图 12.17 正应力对晶格作用示意图
(a) 无应力 (b) 弹性变形

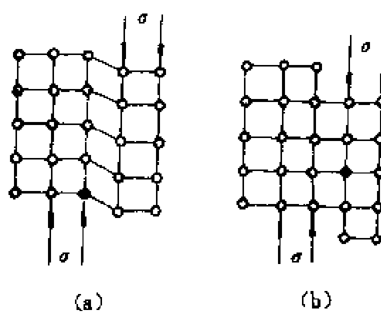


图 12.18 剪应力对晶格作用示意图
(a) 弹性歪曲 (b) 塑性变形(滑移)

在许多情况下，滑移表面是平面，称为**滑移面**。滑移面与晶体外表面的交线称为**滑移线**，在拉伸试件时能够清晰地看到。实验证明，沿着某些晶面比较容易产生滑移，并且滑移一般是沿着原子最密集的方向发生。这种滑移面的方位随晶体而异，例如面心立方的晶体将沿着八面体面滑移，见图 12.19(a)，体心立方的晶体将沿着对角线平面滑移，见图 12.19(b)。实验表明，只有在滑移平面上沿着滑移方向的剪应力达到一定临界值时，才能发生滑移，这一临界切应力通常是杨氏模量的 $10^{-4}\sim10^{-5}$倍。

按照理想化，一个完善的晶粒弹性剪切应变能够达到 10^{-1} 的量级。理想的剪切屈服应力要比实验所测出的量大得多。实验测得弹性剪切应变最大值不超过 10^{-4} 的量级，与之对应的剪切屈服应力很小。之所以造成这种差别，是由于物体的结晶结构并不是完整的，点阵结构存在"缺陷"，图 12.17 和图 12.18 所示的情况实际上是不存在的。X 光衍射表明，结晶体存在的缺陷是大量的，缺陷通常为空穴和夹杂(hole and impurity)形式。由于这种缺陷的存在大大减弱了晶粒对滑移的抵抗能力。

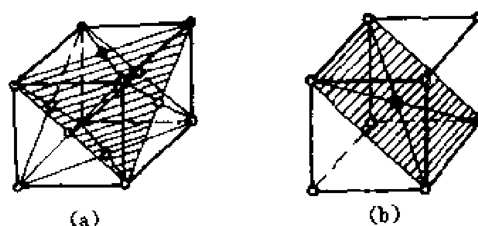


图 12.19 金属晶格的滑移面

(a) 面心立方 (b) 体心立方

有序状态的晶体中的缺陷称作位错。位错实际上是在原子格子中的不连续线，单位体积中这种不连续线的总长度称作位错密度(dislocation density)。

1934 年泰勒(Taylor)、奥莱威和波莱尼(Orawan & Polayni)三个人分别独立提出位错原理，并运用它成功地解释了塑性变形中的问题。由于晶体内存在位错，只要施加很小的切应力，就能使位错移动，结果使得位错通过的两侧发生滑移。这种晶体滑移不是一个原子层相对另一原子层整体同时滑动，而是逐个原子依次滑动的结果，图 12.20 给出了位错运动示意图(图中符号"⊥"表示位错)，所以可认为"滑移"是在有位错的地方发生的，位错是逐步传播的。

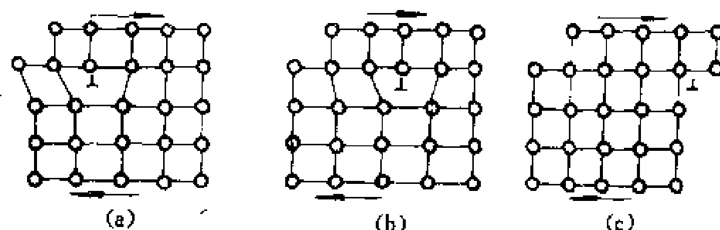


图 12.20 泰勒所提出的位错运动示意图

一般金属都是多晶体的，是由各种形状和各种方位的晶粒紧密聚集而成。晶粒的方位是不规则分布，各个晶粒的平均尺度非常小，晶粒尺度一般为 $10^{-3}\sim10^{-2}$cm，因此金属材料在宏观尺度上可以看成是各向同性的。如果在固体材料某一方向上经受大变形，则每个晶粒中相同的晶体方向逐渐转到共同轴线，这时该材料产生了一个择优方位，而趋于明显的方向性，即各向异性。

金属的塑性变形主要是通过滑移，部分是通过孪晶。孪晶是当晶体发生转动时，晶体的变形平面转换到另一组平面(剪应力到达临界值的位置)时开始形成。有时是因晶体的对称性，晶块沿晶面产生对称滑移，这时可能有两个或两个以上的晶面同时发生滑移。

12.14 塑性变形的本构关系

固体物理可以从微观上很好解释塑性变形的微观机制，但是它在目前的水平上还难以给出塑性变形的应力与应变的关系，塑性本构关系仍靠宏观研究来确定。塑性变形的本

构关系大致分两种：一种是与应变率相关的，这种本构是研究加载速度较大的动载大变形的，即应力不但依赖应变，而且依赖应变率；另一种是与应变率无关的，这种本构关系是用于应变率不大的所谓静载或准静载的固体变形，或是虽加载速率较大，但应力应变关系对应变率变化不敏感的材料。可是在塑性动力学的某些研究中，为了方便起见，大都采用应变率无关的本构或者它的稍许改进，作为动载本构关系的一种近似。

我们将于下文介绍几种用于准静载或动载的本构关系。

12.14.1 **依留申理论（弹塑性小变形理论）**

1943 年，依留申（Ильюшин）将弹性变形的广义胡克定律推广，用于离弹性变形状态不远的塑性状态，即材料虽然发生塑性变形，但变形很小。依留申理论的基本点为：

①物体的体积变化是弹性的，且流体静压力 p 与体膨胀率 θ_1 成正比

按照经典做法，总应变分成弹性应变和塑性应变之和，见(12.216)式，即有

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{xx}^P, \qquad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^e + \varepsilon_{yy}^P, \qquad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{zz}^P \tag{12.221}$$

由于体积变化始终是弹性的，所以塑性变形部分的体积恒为零，即有

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^P + \varepsilon_{yy}^P + \varepsilon_{zz}^P = \theta_1^P = 0 \\ \theta_1 = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx}^e + \varepsilon_{yy}^e + \varepsilon_{zz}^e = \theta_1^e \end{cases} \tag{12.222}$$

于是将描述弹性变化的(12.175)式的第一式搬过来，则有

$$p = -\sigma_m = -K\theta_1 = -K\theta_1^e \tag{12.223}$$

②应力偏量与应变偏量相似且同轴，取二者关系类似于弹性，见(12.175)式：

$$S_{ij} = 2G_* e_{ij} \tag{12.224}$$

在上式中的 G_* 与弹性剪切模量 G 不同，$G_* \neq \text{const}$，它可利用应力强度 σ_I 和应变强度 ε_I 来表示，根据上式，则有（在主轴坐标系中）：

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_m = 2G_*(\varepsilon_1 - \varepsilon_m) \\ \sigma_2 - \sigma_m = 2G_*(\varepsilon_2 - \varepsilon_m) \\ \sigma_3 - \sigma_m = 2G_*(\varepsilon_3 - \varepsilon_m) \end{cases}$$

从而有

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 = 2G_*(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ \sigma_2 - \sigma_3 = 2G_*(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \sigma_3 - \sigma_1 = 2G_*(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \end{cases}$$

根据应力强度 σ_I 的定义和上式，则有

$$\begin{aligned} \sigma_I &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \\ &= \frac{2G_*}{\sqrt{2}}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2} \\ &= \frac{2G_*}{\sqrt{2}}[(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2]^{1/2} \end{aligned} \tag{12.225}$$

按应变强度 ε_I 定义(12.213)式，则有

$$\varepsilon_I = \frac{\sqrt{2}}{3}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}[(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2]^{1/2} \tag{12.226}$$

于是得到
$$\sigma_I = 3G_s \varepsilon_I$$

即有
$$G_s = \sigma_I / 3\varepsilon_I \tag{12.227}$$

关于 σ_I 与 ε_I 的关系可利用屈服条件(12.200)式和硬化条件(12.212)式来确定，即利用

$$\sigma_I^2 = Y^2(\varepsilon_I) \tag{12.228}$$

而 σ_I 亦可以表成应力偏量的函数

$$\sigma_I = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[(s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2]^{1/2} \tag{12.229}$$

其中 s_1、s_2、s_3 满足(见(2.124)、(2.125)和(2.126)式)

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = s_{kk} = 0 \\ s_1 s_2 s_3 = |s_{ij}| \\ s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s_{ij} s_{ij} \end{cases} \tag{12.230}$$

综上所述，见(12.227)～(12.229)式，G_s 不但可看作 ε_I 的函数，亦可看作为应力偏量 s_{ij} 的函数，它随应力状态变化。

综合(12.223)和(12.224)式，并利用(12.227)式，则给出塑性加载的应力应变的非线性关系

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij} \tag{12.231}$$

其中

$$\begin{cases} p = -K\theta_1 = -K\varepsilon_{kk}^e \\ s_{ij} = \dfrac{2\sigma_I}{3\varepsilon_I} e_{ij} \\ \sigma_I = Y(\varepsilon_I) \end{cases} \tag{12.232}$$

③从塑性卸载，按弹性卸载假定，即卸载应力偏量 $\bar{s}_{ij}$ 和卸载应变偏量 $\bar{e}_{ij}$ 满足：

$$\bar{s}_{ij} = s_{ij} + 2G(\bar{e}_{ij} - e_{ij}) \tag{12.233}$$

其中 s_{ij}、e_{ij} 为卸载开始时的塑性应力偏量和应变偏量。

卸载反向屈服或者再加载屈服，则利用屈服条件(12.228)式判断。

12.14.2 汉基理论

1924 年汉基(Hencky)从哈尔—卡门(Haar-Karman)的变分原理出发，给出塑性加载的应力应变关系：

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xx} = \psi\left[\sigma_{xx} - \dfrac{\varphi + \dfrac{3\nu}{1+\nu}}{\varphi + 1}\sigma_m\right] = \psi\left[\sigma_{xx} - \dfrac{\psi - \dfrac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}}{\psi}\sigma_m\right] \\
\varepsilon_{yy} = \psi\left[\sigma_{yy} - \dfrac{\varphi + \dfrac{3\nu}{1+\nu}}{\varphi + 1}\sigma_m\right] = \psi\left[\sigma_{yy} - \dfrac{\psi - \dfrac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}}{\psi}\sigma_m\right] \\
\varepsilon_{zz} = \psi\left[\sigma_{zz} - \dfrac{\varphi + \dfrac{3\nu}{1+\nu}}{\varphi + 1}\sigma_m\right] = \psi\left[\sigma_{zz} - \dfrac{\psi - \dfrac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}}{\psi}\sigma_m\right] \\
\varepsilon_{xy} = \psi\sigma_{xy} \\
\varepsilon_{yz} = \psi\sigma_{yz} \\
\varepsilon_{zx} = \psi\sigma_{zx} \\
-p = \sigma_m = K\varepsilon_{kk} = K\theta_1 = 3K\varepsilon_m
\end{cases}
$$

其中 $$\psi = \frac{1+\varphi}{2G}, \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3}\theta_1$$

据(12.176)式和(12.172)式，则有

$$K = \frac{E}{3(1-\nu)} = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$$

从而得到 $\dfrac{1-2\nu}{2G(1+\nu)} = \dfrac{1}{3K} = (3K)^{-1}$ 于是汉基关系式可改写成

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xx} = \psi\left[\sigma_{xx} - \dfrac{\psi - (3K)^{-1}}{\psi}\sigma_m\right] = \psi(\sigma_{xx} - \sigma_m) + \dfrac{1}{3K}\sigma_m = \psi(\sigma_{xx} - \sigma_m) + \varepsilon_m \\
\varepsilon_{yy} = \psi\left[\sigma_{yy} - \dfrac{\psi - (3K)^{-1}}{\psi}\sigma_m\right] = \psi(\sigma_{yy} - \sigma_m) + \dfrac{1}{3K}\sigma_m = \psi(\sigma_{yy} - \sigma_m) + \varepsilon_m \\
\varepsilon_{zz} = \psi\left[\sigma_{zz} - \dfrac{\psi - (3K)^{-1}}{\psi}\sigma_m\right] = \psi(\sigma_{zz} - \sigma_m) + \dfrac{1}{3K}\sigma_m = \psi(\sigma_{zz} - \sigma_m) + \varepsilon_m \\
\varepsilon_{xy} = \psi\sigma_{xy} \\
\varepsilon_{yz} = \psi\sigma_{yz} \\
\varepsilon_{zx} = \psi\sigma_{zx} \\
-p = \sigma_m = K\theta_1 = 3K\varepsilon_m
\end{cases}
$$

根据应力偏量和应变偏量的定义，见(2.121.1)和(12.77)式，上式又可写成

$$
\begin{cases}
s_{ij} = 2G_\Delta e_{ij} = \dfrac{1}{\psi}e_{ij} \\
p = -\sigma_m = -K\theta_1 = -3K\varepsilon_m
\end{cases}
\tag{12.234}
$$

其中 $$G_\Delta = \frac{1}{2\psi} = \frac{G}{1+\varphi}$$

由汉基关系式整理得到的(12.234)式，与依留申理论的(12.223)和(12.224)式形式完全一样，其中的系数 G_Δ 亦可表成同(12.227)的形式

$$G_\Delta = \sigma_I / 3\varepsilon_I \tag{12.235}$$

汉基理论与依留申理论的不同之处，汉基理论所考虑的材料为理想塑性，即按密赛斯准则(12.211)式：

$$\sigma_I = Y_0 = \text{const}$$

于是 G_Δ 表成

$$G_\Delta = \frac{1}{2\psi} = Y_0/3\varepsilon_I \tag{12.236}$$

其中

$$\varepsilon_I = \frac{\sqrt{2}}{3}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2} \tag{12.237}$$

而

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{kk} \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = |\varepsilon_{ij}| \\ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \end{cases} \tag{12.238}$$

由式(12.236)、(12.237)和(12.238)可知，G_Δ 是作应变分量 ε_{ij} 的函数。

汉基所提出的理论没有指出应力应变关系适应什么程度的塑性加载，实际上它只能用于小的塑性变形，它可以作为依留申理论的一种特殊情况。该理论没有给出卸载规律。

从塑性状态卸载可参照(12.223)式所示的弹性卸载规律。

12.14.3　**列维—密赛斯理论**

列维和密赛斯(Levy and Mises)考察了某些可作为理想塑性材料的变形，像石蜡等高塑性材料，发现应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 与应力偏量 s_{ij} 之间存在一定的关系，于是于1913年提出如下形式的塑性加载关系：

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \cdot s_{ij} \tag{12.239}$$

其中 $d\lambda$ 为比例系数，由屈服条件来确定。

由上式可以推出

$$d\varepsilon_{kk} = d\varepsilon_{11} + d\varepsilon_{22} + d\varepsilon_{33} = d\lambda \cdot (s_{11} + s_{22} + s_{33}) = d\lambda \cdot s_{kk} = 0$$

即

$$d\varepsilon_m = \frac{1}{3}d\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3}d\theta_1 = 0 \tag{12.240}$$

因而有

$$de_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_m = d\varepsilon_{ij} \tag{12.241}$$

同时，他们还认为在塑性加载变形下，弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 可以忽略，于是按(12.216)式有

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p \tag{12.242}$$

于是由(12.239)和(12.242)式得到

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot S_{ij} \tag{12.243}$$

由上式又可得到

$$d\varepsilon_{kk}^p = d\lambda \cdot s_{kk} = 0 \tag{12.244}$$

从而有

$$d\varepsilon_{ij}^p = de_{ij}^p + \frac{1}{3}d\varepsilon_{kk}^p = de_{ij}^p \tag{12.245}$$

于是由(12.243)和(12.245)式得到列维—密赛斯理论的综合表达式

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^p = de_{ij}^p = d\lambda \cdot s_{ij} \\ d\varepsilon_{kk} = d\varepsilon_{kk}^p = de_{kk}^p = 0 \end{cases} \tag{12.246}$$

在主轴坐标系中，上式写在：

$$\begin{cases} d\varepsilon_i^p = de_i^p = d\lambda \cdot s_i \\ d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = de_1^p + de_2^p + de_3^p = 0 \end{cases} \tag{12.247}$$

根据理想塑性材料的密赛斯条件，在塑性加载期间满足(见12.200)式)：

$$\sigma_I = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(s_1-s_2)^2+(s_2-s_3)^2+(s_3-s_1)^2} = Y_0$$

利用(12.247)式，则由上式得到 $\mathrm{d}\lambda$：

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}e_I^P}{Y_0} = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_I^P}{Y_0} \tag{12.248}$$

其中 $\mathrm{d}\varepsilon_I^P$，即 $\mathrm{d}e_I^P$，在(12.247)第二式的条件下写成：

$$\mathrm{d}\varepsilon_I^P = \mathrm{d}e_I^P = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\mathrm{d}e_1^P-\mathrm{d}e_2^P)^2+(\mathrm{d}e_2^P-\mathrm{d}e_3^P)^2+(\mathrm{d}e_3^P-\mathrm{d}e_1^P)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{[(\mathrm{d}e_1^P)^2+(\mathrm{d}e_2^P)^2+\mathrm{d}e_3^P)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}e_{ij}^P\cdot\mathrm{d}e_{ij}^P}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P\cdot\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P} \tag{12.249}$$

由(12.246)、(12.248)和(12.249)式完全确定了 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P$(或 $\mathrm{d}e_{ij}^P$) 与 s_{ij} 之间的关系。当 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P$ 等给定，便可确定 s_{ij}.

然而，在一般情况下，应力偏量按列维 — 密赛斯理论虽可以确定，但应力全量不能确定，除非在特别情况下。因为按(12.240)式，有 $\mathrm{d}\theta_1 = 0$，而据(12.234)的第二式则有 $-\mathrm{d}p = \mathrm{d}\sigma_m = K\mathrm{d}\theta_1$，于是推出：$\mathrm{d}p = \mathrm{d}\sigma_m = 0$，除非 $K=\infty$. 造成这种结果是由于该理论略去了弹性应变增量部分。实际上，在理想塑性变形期间压力 p 还是随变形增长的。

这个理论可求出加载时的应力偏量，然而因忽略弹性增量，故它适用于较大变形，但不能用来求解"弹性回跳"及"残余应力"等问题。

注意式(12.249)所定义的 $\mathrm{d}\varepsilon_I^P$ 并不是 ε_I^P(见(12.215)式)的微分，这是在固体力学中对增量的一种习惯的写法。只有在特殊情况下，如平面不可压的塑性应变或简单加载情况下(见本节最后部分)，$\mathrm{d}\varepsilon_I^P$ 才等于 ε_I^P 的微分。

在主轴坐标系下 ε_I^P 为：

$$\varepsilon_I^P = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1^P-\varepsilon_2^P)^2+(\varepsilon_2^P-\varepsilon_3^P)^2+(\varepsilon_3^P-\varepsilon_1^P)^2}$$

12.14.4 普朗特—雷斯理论

普朗特和雷斯(Prandtl and Reuss)于1924年和1930年提出了新的理论，他们认为列维—密赛斯理论忽略弹性部分，对于大变形可行。在小变形时，弹性变形部分和塑性变形部分属于同级量，不能忽略，即认为 $d\varepsilon_{ij}^e \neq 0$. 他们提出如下关系：

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P = \mathrm{d}\lambda\cdot s_{ij} \tag{12.250}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^e + \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P \tag{12.251}$$

式(12.250)是一个比较重要的关系式，它在一般的塑性理论中经常使用。由

(12.250)式推出

$$d\varepsilon_{kk}^{p} = d\lambda \cdot s_{kk} = 0$$

从而

$$3d\varepsilon_m = d\varepsilon_{kk}^{e} + d\varepsilon_{kk}^{p} = d\varepsilon_{kk}^{e} = 3d\varepsilon_m^{e}$$

即体积改变与塑性变形部分无关。实验已证明，在压力不太高的情况下，塑性可视作不可压缩。根据上式可推出

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^{p} &= d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^{e} = (de_{ij} + d\varepsilon_m\delta_{ij}) - d\varepsilon_{ij}^{e} \\ &= (de_{ij} + d\varepsilon_m^{e}\delta_{ij}) - d\varepsilon_{ij}^{e} = de_{ij} + (d\varepsilon_m^{e}\delta_{ij} - d\varepsilon_{ij}^{e}) \\ &= de_{ij} - de_{ij}^{e} \end{aligned}$$

于是(12.250)式可写成

$$de_{ij} = de_{ij}^{e} + d\lambda \cdot s_{ij} \tag{12.252}$$

在上式中 $d\lambda$ 仍按(12.248)式，即

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{de_I^{p}}{Y_0} = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_I^{p}}{Y_0} \tag{12.253}$$

而 de_{ij}^{e} 与 ds_{ij} 的关系则利用广义胡克定律，已知在弹性变形阶段有(见(12.175)第二式)：

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}^{e}\text{，即 } ds_{ij} = 2Gde_{ij}^{e}$$

将这种关系推广到塑性变形阶段，即认为在塑性加载段亦有

$$ds_{ij} = 2G \cdot de_{ij}^{e} \tag{12.254}$$

于是(12.252)式可以写成

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + d\lambda \cdot s_{ij} \tag{12.255}$$

而

$$p = -K\theta = -K\theta^{e} \quad \text{或} \quad dp = -Kd\theta^{e}$$

这就是普朗特—雷斯理论的常用形式，当 de_{ij} 给定后便可确定应力偏量 s_{ij}。

该理论给出了理想塑性加载时的本构关系，但是没有给出卸载规律。

12.14.5 增量理论的推广

列维—密赛斯理论和普朗特—雷斯理论，给出的是塑性应变增量与应力偏量的关系，它们统称为增量理论。这两种理论所考虑的材料均为理想塑性，但在目前的不少应用中，已经把它们推广到硬化材料中，即将 Y_0 取成 Y，也就是将(12.239)和(12.252)等诸式中的 $d\lambda$ 取成不同于(12.248)式的形式：

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_I^{p}}{\sigma_I} = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_I^{p}}{Y} \tag{12.256}$$

其他形式不变。关于 Y 函数的取法，见(12.212)～(12.218)式。

12.14.6 那达依理论

在增量理论中，我们得到了塑性应变增量与应力偏量之间的关系。为了得到总塑性应变与应力偏量之间的关系，必须对式(12.243)或(12.255)沿加载路径积分。由此可见，应力应变的关系与加载路线有关，而全量理论(或称形变理论)则企图建立用全量形式表示的与加载路径无关的本构方程。然而，塑性应变一般不是与加载路线无关，仅在简单加载情况下才可能。所谓简单加载，即在加载过程中，任一点的应力各分量 σ_{ij} 都按同一比例增

长，数学上表成：

$$\sigma_{ij} = \eta \sigma_{ij}^0 \tag{12.257}$$

其中 $\sigma_{ij}^0 = \text{const}, \eta = \eta(t)$。由上式可以推出：

$$\begin{cases} s_{ij} = \eta s_{ij}^0 \\ \sigma_I = \eta \sigma_I^0 \end{cases} \tag{12.258}$$

其中 $s_{ij}^0 = \text{const}, \sigma_I^0 = \text{const}$（在这里 s_{ij}^0、σ_I^0 以及 σ_{ij}^0 为常数，是指与 t 无关）。

现在考虑推广的列维—密赛斯理论，于是由(12.239)式和(12.256)式得到

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_I^P}{\sigma_I}s_{ij}$$

注意，在这里考虑的是忽略弹性增量的硬化材料大变形。将(12.258)式代进上式的右边，得出

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_I^P}{\sigma_I^0}s_{ij}^0$$

将上式两边积分

$$\int_0^{(\varepsilon_{ij}^P)} \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P = \int_0^{\varepsilon_I^P} \frac{3}{2}\frac{s_{ij}^0}{\sigma_0^I}\mathrm{d}\varepsilon_I^P = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}^0}{\sigma_0^I}\int_0^{\varepsilon_I^P}\mathrm{d}\varepsilon_I^P$$

得到

$$\varepsilon_{ij}^P = \frac{3}{2}\frac{s_{ij}^0}{\sigma_I^0}\varepsilon_I^P$$

再利用(12.258)式，则得到

$$\varepsilon_{ij}^P = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_I^P}{\sigma_I}s_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_I^P}{Y}s_{ij} \tag{12.259}$$

这就是1937年那达依(Nadai)提出的硬化材料大变形理论，亦称汉基—依留申方程。

那达依理论是从简单加载得出的，然而对于大量与比例加载相差不大的实际工程问题仍可使用，亦能得到满意的结果。该理论与依留申理论同属全量理论，差别在于那达依理论考虑的是简单加载、大变形不可压情况（因它略去了弹性部分），而依留申理论出发点是弹塑性小变形。

12.15 弹性应变能函数和塑性势函数

前而在论述塑性变形的全量理论和增量理论时，都引用了密赛斯屈服准则。其实，由该准则引出的密赛斯函数(见12.208)式)就是塑性势函数。塑性势在目前的塑性研究中运用较多，在此做以简单的论述。为了理解塑性势的概念，我们先介绍弹性应变能函数，它在弹性理论研究中亦常用。

12.15.1 弹性应变能函数

弹性体在受到外力作用后，要发生变形，当外力去掉时又有能力恢复原状。这种储存在变形体内的能量称作**弹性应变能**，或称作**弹性势能**或**弹性势**。

在略去其他能量损耗时，如不计热量损失，外力做功所增加的内能正好等于弹性应变能的增加，见12.8节的第二部分的分析。物体内单位体积的弹性应变能 W 为

$$W = W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{(\varepsilon_{ij})} \sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{12.260}$$

从而有

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \tag{12.261}$$

现将 W 化成 σ_{ij} 的函数，为此引用广义胡克定律(12.168)式以及(12.175)式，即有

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu K}\sigma_m\delta_{ij} \tag{12.262}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\mathrm{d}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu K}\delta_{ij}\mathrm{d}\sigma_m \tag{12.263}$$

将(12.263)式代进(12.260)式中，则有

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{(\varepsilon_{ij})}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \int_0^{(\sigma_{ij})}\sigma_{ij}\left[\frac{1}{2\mu}\mathrm{d}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu K}\delta_{ij}\mathrm{d}\sigma_m\right] \\ &= \int_0^{(\sigma_{ij})}\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}\mathrm{d}\sigma_{ij} - \int_0^{\sigma_m}\frac{3\lambda}{2\mu K}\sigma_m\mathrm{d}\sigma_m \\ &= \frac{1}{4\mu}\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{3\lambda}{4\mu K}\sigma_m^2 \end{aligned} \tag{12.264}$$

由上式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{3\lambda}{2\mu K}\sigma_m\frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{3\lambda}{2\mu K}\sigma_m\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}\left[\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\right] \\ &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu K}\sigma_m\delta_{ij} \end{aligned}$$

根据这个结果，再利用(12.262)式，则有

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \tag{12.265}$$

由式(12.261)和(12.265)得到：弹性应变能对任一应变分量的改变率等于相应的应力分量；反过来，弹性应变能对任一应力分量的改变率则等于相应的应变分量。

12.15.2 塑性势函数

类似地，在塑性变形阶段亦存在着这样塑性势函数 $W_p(\sigma_{ij})$：从它对应力分量 σ_{ij} 的偏导数便可导出塑性应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p$ 来，这个塑性势就是密赛斯屈服函数 $f_m(\sigma_{ij})$，即

$$W_p(\sigma_{ij}) = f_m(\sigma_{ij})$$

由式(12.208)和(2.125)可知

$$\begin{aligned} f_m = f_m(\sigma_{ij}) &= \frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2)] \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+3(\sigma_{12}^2+\sigma_{21}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{31}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{32}^2) \end{aligned}$$

由上式可求得

$$\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{11}} = \frac{1}{6}[2(\sigma_{11}-\sigma_{22}) - 2(\sigma_{33}-\sigma_{11})]$$

$$= \sigma_{11} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$
$$= \sigma_{11} - \sigma_m = s_{11}$$

同理

$$\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{22}} = s_{22}, \qquad \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{33}} = s_{33}$$
$$\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{12}} = \sigma_{12} = s_{12}, \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{21}} = \sigma_{21} = s_{21}$$
$$\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{13}} = \sigma_{13} = s_{13}, \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{31}} = \sigma_{31} = s_{31}$$
$$\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{23}} = \sigma_{23} = s_{23}, \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{32}} = \sigma_{32} = s_{32}$$

即

$$\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} \tag{12.266}$$

而据列维—密赛斯理论(12.246)式或(12.250)式，有

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p = \mathrm{d}\lambda \cdot s_{ij}$$

所以，可以把 $f_m(\sigma_{ij})$ 看成塑性势函数，即有

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p = \mathrm{d}\lambda \cdot s_{ij} = \mathrm{d}\lambda \cdot \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} \tag{12.267}$$

由此可见，$f_m(\sigma_{ij})$ 既可作为屈服函数，又可作为塑性势函数。

屈服函数，即塑性势 $f_m(\sigma_{ij})$ 的偏导数$\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}$，则为应力空间屈服面 $f_m(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3}Y^2$ 的梯度分量，它与屈服面的外法线分量成比例。而据(12.267)式，$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p$ 与 s_{ij} 或$\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}$ 成比例，所以屈服面的外法线方向就是塑性应变增量的方向。

为了明确说明上面的论断，我们在主应力空间考虑，在主应力空间式(12.267)变成

$$\mathrm{d}\varepsilon_i^p = \mathrm{d}\lambda \cdot s_i = \mathrm{d}\lambda \cdot \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_i}, \quad s_i = \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_i} \tag{12.268}$$

塑性应变增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^p = (\mathrm{d}\varepsilon_1^p, \mathrm{d}\varepsilon_2^p, \mathrm{d}\varepsilon_3^p)$ 与屈服面 $f_m(\sigma_i) = \frac{1}{3}Y^2$ 的外法线 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的关系表示在图 12.21 中，应力偏量矢量 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ 亦与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 一致，即垂直该屈服面。

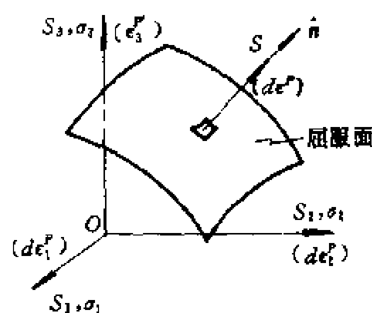


图 12.21

12.16 弹塑性问题·平面问题概念

12.16.1 弹塑性问题

如果物体在载荷的作用下，其弹性应变与塑性

应变是同量阶的，这样的问题则称作弹塑性问题(elasto-plastic problem)。当然，这样的问题仍属于小变形问题。

属于这类问题的典型例子有梁理论(beam theory)、轴扭转(torsion of shafts)和受压的厚壁管与球(thickwalled tube and sphere subjected to pressure)中所出现的那些问题。这些问题依然属于静载问题，描述这种静载的弹塑问题分为：

1. 对于弹性变形段

①平衡方程(equilibrium equations)

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = 0$$

②应力应变关系(stress-strain relations)

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij})$$

③应变位移关系(strain-displacement relations)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i})$$

④应力或位移的边界条件(boundary conditions on stress or displacement)

⑤协调方程(compatibility equations)，见(12.130)式或(12.131)式。

2. 对于塑性变形段

①平衡方程，同上。

②应力与应变增量关系(stress-strain increment relations)，如式(12.250)：

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = S_{ij}d\lambda$$

③屈服条件(yield conditions)，见(12.196)式或(12.200)式。

④塑性边界条件(如若存在的话)。

3. 在弹塑性分界面上(at the elasto-plastic interface)

①应力连续性条件(continuity conditions on stress)

②位移连续性条件(continuity conditions on displacement)

12.16.2 平面问题

有许多弹性或塑性问题可以作二维平面问题处理。平面问题又分作两类：

1. 平面应力问题(problems of plane stress)

所谓平面应力就是只在 x_1x_2 平面上存在应力，即应力张量的分量为

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1,x_2), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(x_1,x_2), \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1,x_2) \\ \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 \end{cases} \tag{12.269}$$

这一类问题出现在一个方向(x_3 向)的尺度比其他两个方向的尺度小得多的薄板变形情况，如图 12.22(a)所示的情形，图示的为一块薄板，只侧向受力。

2. 平面应变问题(problems of plane strain)

所谓平面应变就是变形只发生在 x_1x_2 平面内，即只在 x_1x_2 平面上存在应变或者说位移，即有

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(x_1,x_2) \quad , \quad \tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(x_1,x_2) \quad , \quad \tilde{u}_3 = 0 \tag{12.270}$$

这类问题出现在一个方向(x_3 向)的尺度比其他两个方向的尺度大得多的杆变形情况，

如图 12.22(b)所示的情形,所示的为一个长杆,只侧向受力。

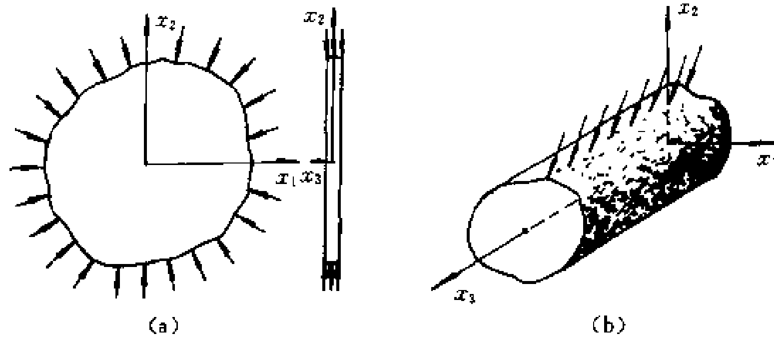


图 12.22

如果变形是非定常的或考虑的是变形的中间过程,在式(12.269)和(12.270)中还要依赖时间 t。

12.17 滑移线理论

在无限制的塑性大变形中,例如金属成形及压延等加工中所出现的情况,对于这种准静态塑性大变形的问题,可以利用滑移线理论(slip line theory)。

材料的塑性变形的主要机制是滑移,特别是在一般的塑性大变形中,变形基本可视作“不可压缩,只发生畸变”,材料沿最大剪应力线发生滑移,所以最大剪应力线又称作滑移线(slip line)。

滑移线理论建立的前提是:

a. 材料变形是平面的; b. 略去变形的弹性部分,因材料变形大,其弹性部分比塑性部分变形小得多; c. 材料虽发生较大变形,但不可压缩;d. 本构关系采用增量理论的表达式; e. 略去惯性力,因变形缓慢; f. 略去体力; g. 理想塑性。

12.17.1 平面不可压塑性应变情况下的位移、应变率和应力

平面应变的位移与速度为:

$$\begin{cases}\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(x_1,x_2,t) \\ \tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(x_1,x_2,t) \\ \tilde{u}_3 = 0\end{cases}, \quad \begin{cases}v_1 = \dot{\tilde{u}}_1(x_1,x_2,t) \\ v_2 = \dot{\tilde{u}}_2(x_1,x_2,t) \\ v_3 = 0\end{cases} \tag{12.271}$$

由于为无限制的大变形,故采取自然应变。根据速度与应变率的关系(见(3.48)式或(12.97)式),则有

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = B_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{12.272}$$

于是由(12.271)式求得

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\varepsilon}_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j = \{\dot{\varepsilon}_{ij}\} = \begin{bmatrix}\dot{\varepsilon}_{11} & \dot{\varepsilon}_{12} & 0 \\ \dot{\varepsilon}_{12} & \dot{\varepsilon}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{12.273}$$

由于略去弹性，则有

$$\varepsilon_{ij}=\overset{0}{\cancel{\varepsilon_{ij}^{e}}}+\varepsilon_{ij}^{P}=\varepsilon_{ij}^{P}\quad,\quad\dot{\varepsilon}_{ij}=\overset{0}{\cancel{\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}}}+\dot{\varepsilon}_{ij}^{P}=\dot{\varepsilon}_{ij}^{P}$$

即有

$$\dot{\mathbf{E}}^{P}=\dot{\varepsilon}_{ij}^{P}\hat{e}_i\hat{e}_j=\{\dot{\varepsilon}_{ij}^{P}\}=\begin{bmatrix}\dot{\varepsilon}_{11}^{P} & \dot{\varepsilon}_{12}^{P} & 0\\ \dot{\varepsilon}_{12}^{P} & \dot{\varepsilon}_{22}^{P} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\tag{12.274}$$

于是有

$$\mathrm{d}\varepsilon_{13}^{P}=\dot{\varepsilon}_{13}^{P}\mathrm{d}t=0,\qquad \mathrm{d}\varepsilon_{12}^{P}=\dot{\varepsilon}_{12}^{P}\mathrm{d}t=0,\qquad \mathrm{d}\varepsilon_{33}^{P}=\dot{\varepsilon}_{33}^{P}\mathrm{d}t=0\tag{12.275}$$

材料的本构关系满足(12.250)式，即有

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{P}=S_{ij}\mathrm{d}\lambda\tag{12.276}$$

而

$$S_{ij}=\sigma_{ij}+p\delta_{ij},\qquad p=-\frac{1}{3}\sigma_{kk}\tag{12.277}$$

于是由(12.275)～(12.276)式推出

$$\sigma_{33}=-p=\frac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}),\qquad \sigma_{12}=\sigma_{13}=0\tag{12.278}$$

即应力张量为

$$\boldsymbol{\Sigma}=\sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j=\{\sigma_{ij}\}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{bmatrix}\tag{12.279}$$

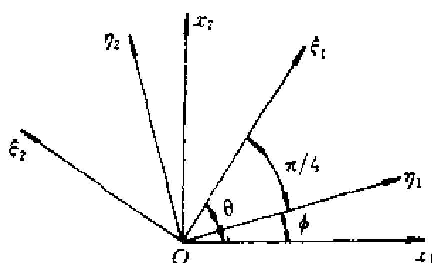


图 12.23

12.17.2 在主轴坐标系下的应力张量

式(12.279)给出的张量为在图 12.23 所示的 $ox_1x_2x_3$ 坐标系中描述的，现在来确定它的主值与主方向。按 § 2.5 的定义(见(2.35.1)和(2.35.2)式)有

$$\boldsymbol{\Sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}^{(i)}=\sigma_{(i)}\hat{\boldsymbol{n}}^{(i)}$$

$$\sigma_{kj}n_j^{(i)}=\sigma_{(i)}n_k^{(i)}$$

从而求得主值 $\sigma_{(i)}$ 和主方向 $\hat{\boldsymbol{n}}^{(i)}$ 分别为

$$\begin{cases}\sigma_{(1)}=-p+\tau\quad,\quad\hat{\boldsymbol{n}}^{(1)}=\cos\theta\hat{e}_1+\sin\theta\hat{e}_2\\ \sigma_{(2)}=-p-\tau\quad,\quad\hat{\boldsymbol{n}}^{(2)}=-\sin\theta\hat{e}_1+\cos\theta\hat{e}_2\\ \sigma_{(3)}=-p\quad,\quad\hat{\boldsymbol{n}}^{(3)}=\hat{e}_3\end{cases}\tag{12.280}$$

其中

$$\begin{cases} p = -\sigma_{33} \\ \tau = \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2/4 + \sigma_{12}^2} \\ \mathrm{tg}2\theta = \dfrac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \end{cases} \tag{12.281}$$

于是在以 $\hat{n}^{(1)}$、$\hat{n}^{(2)}$、$\hat{n}^{(3)}$ 为标轴方向的主轴坐标系 $o\xi_1\xi_2\xi_3$(即 x_3) 中应力张量 Σ 表成 Σ^*

$$\Sigma^* = \begin{pmatrix} -p+\tau & 0 & 0 \\ 0 & -p+\tau & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{12.282}$$

12.17.3 在最大剪应力坐标系下的应力张量

由 § 2.7 可知,最大剪应力(见(2.29)式)为

$$\frac{1}{2}(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}) = \tau \tag{12.283}$$

最大剪应力作用面过 ξ_3 轴(x_3 轴)又平分 ξ_1 轴与 ξ_2 轴之间的夹角,见图 12.23,即最大剪应力 τ 的作用面的方向有两个:$\hat{m}_1$ 与 $\hat{m}_2$

$$\begin{cases} \hat{m}_1 = \cos\phi\hat{e}_1 + \sin\phi\hat{e}_2 \\ \hat{m}_2 = -\sin\phi\hat{e}_1 + \cos\phi\hat{e}_2 \end{cases} \tag{12.284}$$

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{4} \quad ,\mathrm{tg}2\phi = -\mathrm{ctg}2\theta = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\sigma_{12}} \tag{12.285}$$

应力张量 Σ 在以 $\hat{m}_1$、$\hat{m}_2$、$\hat{m}_3 = \hat{e}_3$ 为坐标轴向的坐标系 $o\eta_1\eta_2\eta_3$(其中 η_3 即 x_3) 中表成 Σ^∇

$$\Sigma^\nabla = \{\sigma_{ij}^\nabla\} = \begin{pmatrix} -p & \tau & 0 \\ \tau & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{12.286}$$

图 12.24 表示出一个面元,面元各边为最大剪应力作用面。

12.17.4 关于最大剪应力 τ 恒为常量的问题

式(12.283)或(12.281)中的 τ 对于同一质点或者不同质点,它在整个塑性变形的过程中均取同一个值,即 τ 恒为常量。

这是因为我们所研究的为理想塑性,即在屈服条件中(见(12.196)或(12.200)式):

$$Y \equiv \mathrm{const} = Y_0 \tag{12.287}$$

将应力张量 Σ^* 代进密赛斯屈服条件(12.200)式中,则推出

$$\tau = Y_0/\sqrt{3} \equiv \mathrm{const}$$

将 Σ^* 代进屈斯卡屈服条件(12.196)式中,则推出

$$\tau = Y_0 \equiv \mathrm{const}$$

总之,不管按哪一种屈服准则均推出

$$\tau \equiv \mathrm{const} \tag{12.288}$$

12.17.5 滑移线

在同一时刻,在材料中的每一点(质点)都有两个相互垂直的最大剪应力方向,即有两个相互垂直的最大剪应力作用的内表面面元,作为平面二维情形则为两段相互垂直的线

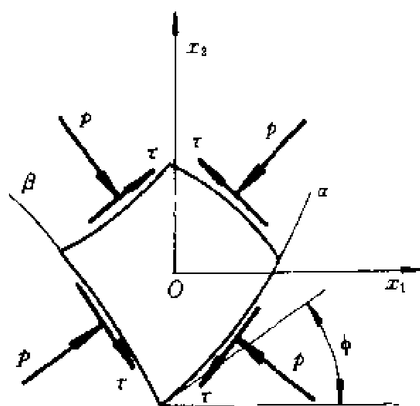


图 12.24

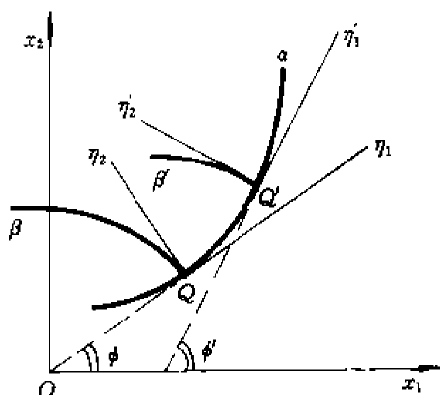


图 12.25

元，如图 12.24 所示。将其相邻诸点(如图12.25 中的 Q 点与 Q' 点)处的这样线元连接起来则成了两族曲线 —— 最大剪应力方向曲线，即滑移线。

现以 α、β 分别代表这两族曲线，同时 α、β 亦分别作为这两族曲线的参变量，即

α 线：
$$\begin{cases} x_1 = x_1(\alpha) \\ x_2 = x_2(\alpha) \end{cases}, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \mathrm{tg}\phi \tag{12.289}$$

β 线：
$$\begin{cases} x_1 = x_1(\beta) \\ x_2 = x_2(\beta) \end{cases}, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \mathrm{tg}(\phi + \frac{\pi}{2}) = -\mathrm{ctg}\phi \tag{12.290}$$

其中

$$\phi = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2\sigma_{12}}) \tag{12.291}$$

如果 σ_{12}、σ_{11}、σ_{22} 作为 x_1、x_2 的函数给出来，便从(12.289)式和(12.290)式积分，得到 α 和 β 曲线。

其实，滑移线就是特征线。

12.17.6　关于滑移线就是特征线的问题

按照本问题的出发点：略去体力、惯性，则平衡方程为

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

对于现在所考虑的平面二维应变，上式写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{12.292}$$

现将 $ox_1x_2x_3$ 坐标系中描述的应力张量分量 σ_{ij} 用最大剪应力坐标系中描述的分量 σ_{ij}^{∇} 来表示。为此，我们考虑图 12.25 所示的那任一点 Q，点 Q 的应力张量在 $ox_1x_2x_3$ 系中和在 $Q\eta_1\eta_2\eta_3$ 系中分别写成

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_{ij}\hat{e}_i\hat{e}_j \quad , \boldsymbol{\Sigma}^{\nabla} = \sigma_{ij}^{\nabla}\hat{m}_i\hat{m}_j$$

已知 $\boldsymbol{\Sigma}^{\nabla}$ 的具体形式为式(12.286)所示。由(12.284)式可得出，从 $\eta_1\eta_2\eta_3$ 坐标系转到

$x_1x_2x_3$ 系的变换张量 A 为

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此得到

$$\Sigma = \mathbf{A} \cdot \Sigma^{\nabla} \cdot \mathbf{A}_c \quad \text{或} \quad \sigma_{ij} = a_{ik}a_{jl}\sigma_{kl}^{\nabla}$$

即有

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -p - \tau\sin2\phi \\ \sigma_{22} = -p + \tau\sin2\phi \\ \sigma_{12} = \tau\cos2\phi \end{cases} \tag{12.293}$$

将上式代进(12.292)式中，并考虑到 $\tau \equiv \text{const}$ ，则给出

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x_1} + 2\tau(\cos2\phi\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} + \sin2\phi\dfrac{\partial \phi}{\partial x_2}) = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial x_2} + 2\tau(\sin2\phi\dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} - \cos2\phi\dfrac{\partial \phi}{\partial x_2}) = 0 \end{cases} \tag{12.294}$$

按第七章求特征线的方法，可从上式求得两族特征线分别为

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \mathrm{tg}\phi \quad \text{和} \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = -\mathrm{ctg}\phi \tag{12.295}$$

如上两式即为式(12.289)和(12.290)，从而说明**特征线就是滑移线**。

12.17.7 求沿滑移线压力、速度与转角之间的关系

从(12.294)可以求得特征线，当然亦可求得沿特征线(即沿滑移线)的关系式：

沿 α 线
$$\mathrm{d}p + 2\tau\mathrm{d}\phi = 0 \tag{12.296}$$

沿 β 线
$$\mathrm{d}p - 2\tau\mathrm{d}\phi = 0 \tag{12.297}$$

如上给出了沿滑移线 p 与 ϕ 的关系。如下求速度与转角之间的关系。

现考虑在 $t = t$ 时刻，沿图 12.25 所示的 α 线上任一点 Q 及其附近的一点 Q'，在 Q 点的速度 $\boldsymbol{v}$ 表示在 $Q\eta_1\eta_2\eta_3$ 坐标系中为

$$\boldsymbol{v} = v_\alpha\hat{\boldsymbol{m}}_1 + v_\beta\hat{\boldsymbol{m}}_2 \tag{12.298}$$

在 Q' 点的速度 $\boldsymbol{v}'$ 表示在 $Q'\eta_1'\eta_2'\eta_3'$ 坐标系中为

$$\boldsymbol{v}' = v_\alpha'\hat{\boldsymbol{m}}_1' + v_\beta'\hat{\boldsymbol{m}}_2' \tag{12.299}$$

而从 $Q\eta_1\eta_2\eta_3$ 系到 $Q'\eta_1'\eta_2'\eta_3'$ 系，方向旋转了：$\Delta\phi = \phi' - \phi$，从而求得

$$\hat{\boldsymbol{m}}_1' = \cos\Delta\phi\hat{\boldsymbol{m}}_1 + \sin\Delta\phi\hat{\boldsymbol{m}}_2$$

$$\hat{\boldsymbol{m}}_2' = -\sin\Delta\phi\hat{\boldsymbol{m}}_1 + \cos\Delta\phi\hat{\boldsymbol{m}}_2$$

故 $\boldsymbol{v}'$ 表示在 $Q\eta_1\eta_2\eta_3$ 系中为

$$\boldsymbol{v}' = (v_\alpha'\cos\Delta\phi - v_\beta'\sin\Delta\phi)\hat{\boldsymbol{m}}_1 + (v_\alpha'\sin\Delta\phi + v_\beta'\cos\Delta\phi)\hat{\boldsymbol{m}}_2 \tag{12.300}$$

现在 $Q\eta_1\eta_2\eta_3$ 坐标系中考虑问题，并将 Q' 视作沿 α 线的动点，即 Q' 随参数 α 变化，当然 Q' 的坐标 η_1、η_2 以及相应的 v_α'、v_β'、ϕ 等亦只作为 α 的函数。据此，以及式(12.300)和(12.298)，可求在 Q 点处沿 α 线的 v_α 分量随 η_1 的变化：

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial \eta_1} = \lim_{\Delta\eta_1 \to 0}\frac{(v_\alpha'\cos\Delta\phi - v_\beta'\sin\Delta\phi) - v_\alpha}{\Delta\eta_1}$$

$$= \lim_{\Delta\eta_1\to 0}\left[\frac{(v_\alpha'\cos\Delta\phi - v_\beta'\sin\Delta\phi) - v_\alpha}{\Delta\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta\eta_1}\right]$$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}v_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} - v_\beta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\alpha}\right]\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\eta_1} \tag{12.301}$$

在 $Q\eta_1\eta_2\eta_3$ 坐标系中,Q 点的应力张量为式(12.286)所示,从而可以推出

$$S_{11}^{\triangledown} = \sigma_{11}^{\triangledown} + p = 0$$

再将式(12.276)所示的本构关系搬到 $Q\eta_1\eta_2\eta_3$ 系中,即有

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{\triangledown} = S_{ij}^{\triangledown}\mathrm{d}\lambda \tag{12.302}$$

从以上两式可以推出

$$\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\triangledown} = \dot{\varepsilon}_{11}^{\triangledown}\cdot\mathrm{d}t = 0,\quad 即\quad \dot{\varepsilon}_{11}^{\triangledown} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial\eta_1} = 0 \tag{12.303}$$

于是由(12.301)式和(12.303)式推出

沿 α 线
$$\frac{\mathrm{d}v_\alpha}{\mathrm{d}\alpha} - v_\beta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\alpha} = 0\quad ,即\quad \mathrm{d}v_\alpha - v_\beta\mathrm{d}\phi = 0 \tag{12.304}$$

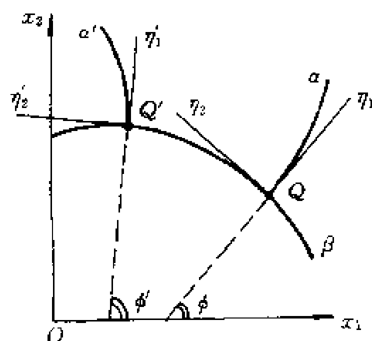


图 12.26

同理,在 t 时刻考虑图 12.26 中沿 β 线上的 Q 及它邻近的动点 Q',在 Q' 的速度 v' 仍表成如(12.300)式的形式。只不过 Q' 的坐标及 v_α'、v_β'、ϕ,现只作为参数 β 的函数,于是参照式(12.301)可推出

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial\eta_2} = \left[v_\alpha\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\beta} + \frac{\mathrm{d}v_\beta}{\mathrm{d}\beta}\right]\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\eta_2}$$

再据(12.286)式和(12.302)式,则有

$$S_{22}^{\triangledown} = 0\quad ,\dot{\varepsilon}_{22}^{\triangledown} = \frac{\partial v_\beta}{\partial\eta_2} = 0$$

于是由如上诸式推出

沿 β 线
$$\frac{\mathrm{d}v_\beta}{\mathrm{d}\beta} + v_\alpha\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\beta} = 0\quad ,即\quad \mathrm{d}v_\beta + v_\alpha\mathrm{d}\phi = 0 \tag{12.305}$$

注意:式(12.296)和(12.297)亦可按如上的方法推出来。

将式(12.295)~(12.297)、(12.304)和(12.305)归纳起来,则有

沿 α 线：
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=\mathrm{tg}\phi \quad , \quad \mathrm{d}v_\alpha - v_\beta \mathrm{d}\phi = 0 \\ \mathrm{d}p + 2\tau \mathrm{d}\phi = 0 \quad ,\text{或} \quad p + 2\tau\phi = C_\alpha\end{cases} \tag{12.306}$$

沿 α 线 $C_\alpha=\mathrm{const}$，线 α 不同 C_α 亦不同

沿 β 线：
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}=-\mathrm{ctg}\phi \quad , \quad \mathrm{d}v_\beta + v_\alpha \mathrm{d}\phi = 0 \\ \mathrm{d}p - 2\tau \mathrm{d}\phi = 0 \quad ,\text{或} \quad p - 2\tau\phi = C_\beta\end{cases} \tag{12.307}$$

沿 β 线 $C_\beta=\mathrm{const}$，线 β 不同 C_β 亦不同

其中

$$\begin{cases}\tau=\sqrt{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2/4+\sigma_{12}^2}=\mathrm{const} \\ p=-\sigma_{33}=-\dfrac{1}{2}(\sigma_{11}+\sigma_{22}) \\ \phi=\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2\sigma_{12}}\end{cases} \tag{12.308}$$

12.17.8 滑移线及滑移线上的物理量的数值计算

式(12.306)和(12.307)虽然给出了滑移线的微分方程及滑移线上物理量关系式，然而作为 x_1 和 x_2 的函数 p 和 ϕ 一般是未知，所以仍得不到塑性变形区域的解。要求解 p 和 ϕ 等，一般是沿特征线进行数值解，求解从已知的边界开始。在实际问题中已知的边界条件有三种情况：

a. 在一条非滑移线 $\mathscr{T}$（见图12.27）上给定 p 和 ϕ 等物理量。求塑性区的滑移线及其上的物理量。

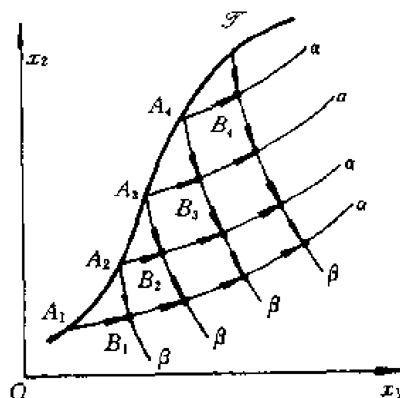


图 12.27

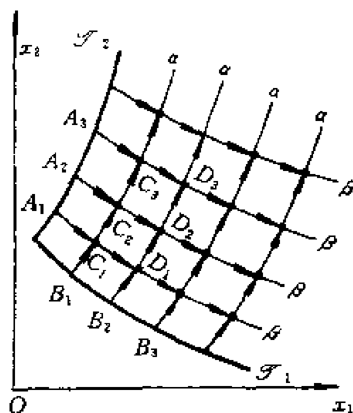


图 12.28

将边值线 $\mathscr{T}$ 分成若干个相近的点 A_1、A_2、……，在这些分点上物理量当然是已知的。过 $\mathscr{T}$ 线上任意两个相邻点 A_1 和 A_2 分别作 α 线和 β 线，两线交点为 B_1，据(12.306)和(12.307)式可求它，如下先求 B_1 点的物理量：

$$\begin{cases}\text{沿 } A_1B_1 \text{ 线} \\ \qquad p_{A_1} + 2\tau\phi_{A_1} = p_{B_1} + 2\tau\phi_{B_1} \\ \text{沿 } A_2B_1 \text{ 线} \\ \qquad p_{A_2} - 2\tau\phi_{A_2} = p_{B_1} - 2\tau\phi_{B_1}\end{cases}$$

从而求得 B_1 的物理量为

$$\begin{cases}p_{B_1} = \dfrac{1}{2}(p_{A_1} + p_{A_2}) + \tau(\phi_{A_1} - \phi_{A_2}) \\ \phi_{B_1} = \dfrac{1}{4\tau}(p_{A_1} - p_{A_2}) + \dfrac{1}{2}(\phi_{A_1} + \phi_{A_2})\end{cases}$$

根据如上求得的 p_{B_1} 和 ϕ_{B_1}，再利用(12.293)式或(12.308)式，便可求得 σ_{11}、σ_{22}、σ_{12}. 当然将沿 α 线和 β 线上的速度关系式变成差分，就可求得 B_1 点的速度，在此从略。

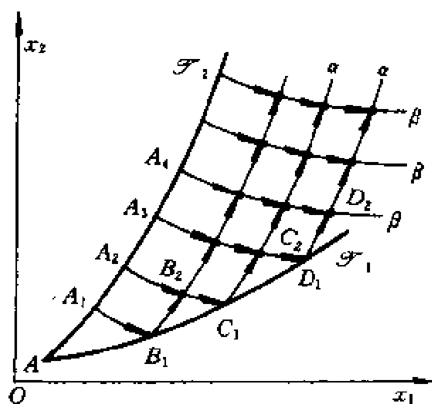


图 12.29

在求得 B_1 点的 ϕ_{B_1} 后便可确定 B_1 的位置。将 α 线和 β 的方程化成差分：

$$\begin{cases}\text{沿 } A_1B_1 \text{ 线} \\ \qquad \dfrac{(x_2)_{B_1} - (x_2)_{A_1}}{(x_1)_{B_1} - (x_1)_{A_1}} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{tg}\phi_{A_1} + \mathrm{tg}\phi_{B_1}) \\ \text{沿 } A_2B_1 \text{ 线} \\ \qquad \dfrac{(x_2)_{B_1} - (x_2)_{A_2}}{(x_1)_{B_1} - (x_1)_{A_2}} = -\dfrac{1}{2}(\mathrm{ctg}\phi_{A_2} + \mathrm{ctg}\phi_{B_1})\end{cases}$$

上式联立求解便可确定 B_1 点的坐标 $(x_1)_{B_1}$ 和 $(x_2)_{B_1}$。以此类推，便可确定 B_2、B_3、…… 的物理量及其位置。

b. 在两条滑移线上给定 p 和 ϕ 等物理量，如图 12.28 所示的边值线，其中 $\mathscr{T}_1$ 为一条 β 线，$\mathscr{T}_2$ 为一条 α 线。将 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 线分成若干相近的点，然后按箭头所示的方向确定 C_1、C_2、……；D_1、D_2、…… 等点。

c. 在一条滑移线和一条非滑移线上给定 p 和 ϕ 等物理量，如图 12.29 所示的边值线，其中 $\mathscr{T}_2$ 为一条 α 线，$\mathscr{T}_1$ 为一条非滑移线。在这种情况下，只能从图示 A 点开始沿 $\mathscr{T}_2$ 线分点，分成 A_1、A_2、……。计算时，从 A_1 点作一条 β 线，交于 $\mathscr{T}_1$ 线于 B_1，确定出 B_1 点的物理量及坐标；再从 B_1 作一条 α 线，从 A_2 作一条 β 线，两线相交于 B_2，确定该点的物理量及坐标；再从 B_2 点作一条 β 线，交于 $\mathscr{T}_1$ 线于 C_1；以此类推……按箭头所指的方向便可确定全部的滑移线及其物理量。

12.18 固体在动态高压、较高压下的本构关系·冲击绝热曲线

在前面诸节所研究的那些本构关系是对于弹性变形和塑性变形的，然而不管这些变形是大还是小，均属于静载或准静载情况。当然在某些动载大变形中有时也近似使用这些本构关系，但精度较差，尤其在强脉冲载荷下将差得太远。所以固体在动态高压和较高压下必须采用新的本构关系，至于采用哪种新的本构关系，要根据固体可作为何种介质模型而定。

固体在动态较高压力下，可作为流体弹塑性介质模型；在动态高压下，可以作“可压缩流体模型”。

12.18.1　流体弹塑性介质的本构关系

所谓流体弹塑性介质，即物体既具有固体的弹塑性，又具有流体的可压缩性和流动性，这是固体在较高压力下的行为。为了适应介质这种瞬态变化流动的特征，将采用具有以下特色的本构关系：①采用自然应变；②将应力分成偏量和流体静压力予以分别考虑；③应力偏量和应变偏量之间采用微分关系，且用于变形的全过程(包括弹性变形、塑性加载，弹性卸载以及从弹性卸载到反向屈服或者重新塑性加载)，只是这种关系在用于塑性加载时须用另外的关系稍加修正。

综上所述，这样的本构关系写成

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + s_{ij} \\ p = p(V, S_*) = p(V, T) = p(V, e) \\ \dot{s}_{ij} = 2G_* \dot{e}_{ij} \\ \dot{e}_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) - \dfrac{1}{3}\dot{\theta}_1\delta_{ij} \\ \text{(该式是在直角笛卡尔坐标系中的形式)} \\ \dot{\theta}_1 = \mathrm{div}\, v \\ G_* = (1 + \eta p)G \end{cases} \tag{12.309}$$

式中 $\dot{e}_{ij}$ 为(12.98)式所示的自然应变偏量的变化率，η 为材料常数，e 为比内能。关于 p 的具体表达式参见本节的第二部分(尽管，那里所研究的压力是对于高压的，但也用于较高压的情形)，在低压时它应趋于(12.175)第一式所示的形式，G 为一般的工程剪切模量，S_* 为比熵。

式(12.309)的第三式一般无法积分，需要按有限差分办法积分。由于 $\dot{e}_{ij}$ 是按(12.112)式定义的，而 $\dot{s}_{ij} = 2G_*\dot{e}_{ij}$ 是这样得出的：

$$\lim_{t_{n+1}\to t_n} \frac{s_{ij}^T(t_{n+1}) - s_{ij}(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = 2G_*\dot{e}_{ij}$$

所以将 $\dot{s}_{ij} = 2G_*\dot{e}_{ij}$ 差分，则写成

$$s_{ij}^T(t_{n+1}) - s_{ij}(t_n) = 2G_*\dot{e}_{ij} \cdot (t_{n+1} - t_n) = 2G_*\dot{e}_{ij} \cdot \Delta t \tag{12.310}$$

其中 $s_{ij}^T(t_{n+1})$ 是将 $s_{ij}(t_{n+1})$ 旋转角 $-\Delta\alpha$ 之后的张量分量，其中 $\Delta\alpha$ 为：

$$\Delta\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\, v \cdot (t_{n+1} - t_n) = \omega \cdot \Delta t \tag{12.311}$$

其中 ω 为角速度，见(12.104)式

$$\omega = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\, v = \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right\}$$

如果在 $t = t_n$ 时刻，$s_{ij}(t_n)$ 和 $2G_*e_{ij}$ 已知，求 $t = t_{n+1}$ 时刻的 $s_{ij}(t_{n+1})$，则可利用(12.310)式。不过，应将 $s_{ij}^T(t_{n+1})$ 再旋转 $\Delta\alpha$。将(12.310)式两边同时旋转 $\Delta\alpha$，则有

$$s_{ij}(t_{n+1}) = \{s_{ij}(t_n) + 2G_* \dot{e}_{ij} \cdot \Delta t\}^{\perp} \tag{12.312}$$

在这里"⊥"表示将其张量旋转 $\Delta\alpha$ 角。由于在上式中右边第二项较小，旋不旋转差异不大，故在实际应用中，有时将上式近似成：

$$\begin{aligned} s_{ij}(t_{n+1}) &= s_{ij}^{\perp}(t_n) + 2G_* \dot{e}_{ij} \cdot \Delta t \\ &= s_{ij}(t_n) + 2G_* \dot{e}_{ij} \cdot \Delta t + \Delta\beta_{ij} \end{aligned} \tag{12.313}$$

其中

$$\Delta\beta_{ij} = s_{ij}^{\perp}(t_n) - s_{ij}(t_n) \tag{12.314}$$

在计算 p 时按(12.309)的第二式计算，当然在整个变形中都使用，没有弹性塑性、加载与卸载之分；计算 s_{ij} 时按(12.312)或(12.313)式计算，亦不必区分是什么过程，但必须加上屈服条件判断以至于修正。为了说明方便，将问题纳入主应力空间考虑。从(12.312)或(12.313)式求得的 $s_{ij}(t_{n+1})$ 在主应力空间化成 $s_i(t_{n+1})$。

将 $s_i(t_{n+1})$ 代进屈服条件(12.200)式的左边，即求 σ_I^2：

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{2}[(s_1(t_{n+1}) - s_2(t_{n+1}))^2 + (s_2(t_{n+1}) - s_3(t_{n+1}))^2 + (s_3(t_{n+1}) - s_1(t_{n+1}))^2]$$

若

$$\sigma_I^2 \leqslant Y^2$$

则由式(12.312)或(12.313)所求得的 $s_{ij}(t_{n+1})$ 就是该时刻的应力偏量。

若

$$\sigma_I^2 > Y^2$$

则说明应力状态点超出屈服面。这不符合塑性变形规律，必须修正。现在考虑的是密赛斯屈服面，它在 π 平面上是个圆，如图12.30所示。$\sigma_I = Y$ 为屈服圆，设在 t_n 时刻应力偏量的状态点落在屈服圆上的点 $A(s_1(t_n), s_2(t_n), s_3(t_n))$；在下一时刻 t_{n+1}，按(12.312)或(12.313)式计算的应力点$(s_1(t_{n-1}), s_2(t_{n+1}), s_3(t_{n+1}))$落在图示的 B 点(B 点应在 π 平面上，因为应力偏量第一不变量 $\mathrm{I}_D = s_1 + s_2 + s_3 = 0$，而在 π 平面上恰恰满足这一条件，故不管应力偏量的状态点如何变化，它都在 π 平面上)。按塑性变形规律的要求，若为理想塑性，B 点应落在 $\sigma_I = Y = Y_0$ 的圆上；若为同性硬化，它应落在 $\sigma_I = Y^{\Delta}$ 圆上，所以对所求得的 $s_i(t_{n+1})$ 必须修正，令 $\bar{s}_i$：

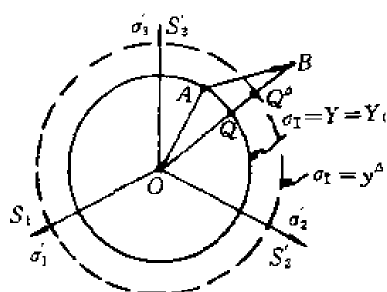


图 12.30

$$\bar{s}_i = \Lambda s_i(t_{n+1}) \tag{12.315}$$

其中

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}Y / \sqrt{s_1^2(t_{n+1}) + s_2^2(t_{n+1}) + s_3^2(t_{n+1})}$$

将所求得的 $\bar{s}_i$ 作为 t_{n+1} 时刻的真正的应力偏量。

之所以做这样的修正，一方面是为了保证新的应力点落在屈服面上；另一方面是鉴于应力偏量矢量 $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ 一定垂直屈服面(即沿径向)，应力状态点从 A 变化到 B，可以看作应力先按中性变载沿屈服圆从 A 到 Q，然后，由于硬化沿 $\overline{OB}$ 变化到 B 点，为了克服这种"过分的硬化"，所以把它又沿 $\overline{OB}$"拉回"到 Q 点(对于各向同性硬化情况，回到 Q^{Δ} 点)。

12.18.2 固体高压状态方程

面体在较高压力下，其抗畸变的能力——剪切强度与流体静压力相比较小。随着压力

的增加这种比例关系越来越小，若在本构关系中略去畸变部分（偏量部分），则成了压力与比容等的关系，这种本构关系有时称作**固体高压状态方程**。

在(12.309)的第一式中，略去 s_{ij} 则成为

$$\sigma_{ij} = - p\delta_{ij} \tag{12.316}$$

这时固体介质看成无粘性的可压缩流体。关于高压状态方程，即函数 p 的取法主要有以下三种：

1. 玻瑞及曼方程

玻瑞及曼(Bridgman)在1945～1949年，曾研究了数十种元素和化合物在高达 10^4～10^5bar(巴)的静高压下体积压缩随静压力的变化的关系。根据实验测量的结果，给出了如下的经验公式(称作玻瑞及曼方程)：

$$\frac{V_0 - V}{V_0} = ap - bp^2 \tag{12.317}$$

其中 V 为比容，V_0 为初始比容，a 和 b 为材料常数。当 p 以巴为单位时：a 为 $10^{-6} \sim 10^{-7}$/bar 的量级，b 为 10^{-12}/bar^2 的量级，如对于铁在24℃时有

$$\frac{V_0 - V}{V_0} = 5.826 \times 10^{-7} p - 0.80 \times 10^{-12} p^2$$

据(12.122)式，(12.317)式亦可写成(12.175)式的形式

$$p = - K(p) \cdot \theta_1 \tag{12.318}$$

其中

$$\begin{cases} K(p) = \dfrac{1}{a - bp} = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{b}{a}p} \\ \theta_1 = (V - V_0)/V_0 \end{cases} \tag{12.319}$$

从 $K(p)$ 的表达式看出，K 随 p 增加而增加，即物体越来越难压。由于 b/a 约为 $10^{-5} \sim 10^{-6}$bar 的量级，故压力 p 须达 $10^3 \sim 10^4$bar 的量级，K 才变化约1%，所以在低压的情况下把 K 视作常数，只有高压时才考虑容变律的非线性关系。

帕克(Pack)等利用玻瑞及曼的实验数据在固体物理分析的基础上又给出另一种形式方程：

$$p = \alpha\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3}\left\{\exp\left[\beta\left(1 - \left(\frac{V}{V_0}\right)^{1/3}\right)\right] - 1\right\} \tag{12.320}$$

其中 α 和 β 为由实验所确定的材料常数，表12.2给出了几种材料的数据。

表12.2　几种材料的 α 和 β 值

材　料	铁	铝	镁	铜	铅	石英玻璃
ρ_0(g/cm^3)	7.86	2.72	1.74	8.93	11.34	2.21
α (10^5bar)	6.01	1.90	0.639	3.52	1.32	4.7
β	8.4	11.4	15.6	11.7	10.0	2.0

状态方程(12.317)和(12.320)是在静高压的条件下得出的，属于固体的等温状态方程类型：$p = f(V,T)|_{T=\text{const}} = p(V)$。

2. 穆纳汉方程

穆纳汉(Murnagham)在研究有限变形弹性理论的基础上，通过复杂的演算导出如下形式的方程(称作穆纳汉方程)：

$$p = A\left\{\left(\frac{V_0}{V}\right)^n - 1\right\} \tag{12.321}$$

其中 A 和 n 为材料常数，对于大部分金属 n 约为4，关于 A 和 n 的值见表11.8和表11.9。

穆纳汉方程属于等熵类型的状态方程：$p = f(V,S_*)|_{S_*=\text{const}} = p(V)$，它可用于爆炸一类的脉冲载荷过程，因为其过程快，故可视作绝热等熵。该方程与多方气体的等熵方程 $p = A\rho^k$ 类似，只是多了一项。

3. 格林乃森方程

玻瑞及曼方程是描述物态的等温过程的，穆纳汉方程是描述物态等熵过程的，都不全面，它们只能用于固体特定的热力学状态。在一般情况下，固体的状态方程不是 p 和 V 之间的关系所能描述的，描述固体在高压下比较完善的状态方程是格林乃森(Grüneisen)方程：

$$p = p_*(V) + \frac{\Gamma}{V}(e - e_*(V)) \tag{12.322}$$

其中：e 为比内能，e_* 为冷比内能，Γ 为格林乃森系数，p_* 为冷压。e_* 与 p_* 的关系为

$$p_*(V) = -\,\mathrm{d}e_*/\mathrm{d}V \tag{12.323}$$

Γ 为 V 的函数，$\Gamma = \Gamma(V)$，但在一般的情况下：

$$\Gamma/V \approx \Gamma_0/V_0 = \text{const} \tag{12.324}$$

关于 e_* 和 p_* 的近似取法形式很多，如取成：

$$\begin{cases} p_* = g^2(V_0 - V)/[V_0 - h(V_0 - V)]^2 \\ e_* = \dfrac{1}{2}p_* \cdot (V_0 - V) \end{cases} \tag{12.325}$$

其中 g 和 h 为材料常数、V_0 为初始比容，关于 g、h 和 Γ_0 的取值参见表12.3。

注意，状态方程(12.322)是在高压下使用，对于强拉伸状态可以使用如下形式的状态方程：

$$p = \frac{\Gamma_0}{V_0}\left\{e - \frac{C_v}{3\alpha_0}\left(\frac{V}{V_0} - 1\right)\right\} \tag{12.326}$$

其中 C_v 为定容比热，α_0 为线膨胀系数。关于它们的取值请见本章附表12.1。

12.18.3 冲击绝热线

在上述的高压状态方程中许多参数都与冲击波有关；同时，冲击波也是固体在高压冲击下重要的现象。为此，在此略述一下面体中的冲击波。

固体在高压下，$\sigma_{ij} \to -p\sigma_{ij}$。这样，具有抗剪性质的固体则成了"可压缩流体"，应力波则变成了冲击波(但亦有许多人将强间断的应力波亦统称为冲击波，如我们在十三章中所做)。在固体中的冲击波关系式同第七章气体中的冲击波关系式完全一样，它们为(对于平面正冲击波)：

$$\begin{cases} \rho_- u_- - \rho_+ u_+ = N(\rho_- - \rho_+) \\ p_- - p_+ = \rho_+ (N - u_+)(u_- - u_+) \\ e_- - e_+ = -\dfrac{1}{2}(p_- + p_+)(V_- - V_+) \\ p = f(V,e) \end{cases} \tag{12.327}$$

在上式中 N 为冲击波速，u 为垂直冲击波波阵面的质点速度，$V = \dfrac{1}{\rho}$，下标“－”和“＋”分别表示冲击波阵面后面和前面的物理量，其他符号如前所述。

在随冲击波前质点运动的坐标系中，亦相当在冲击波前介质静止的情况，冲击波相对前方质点的运动速度 U 为

$$U = N - u_+$$

利用上式，冲击波关系式(12.327)写成(注意，如下所述的 u_- 和 u_+ 是在随激波前质点运动的坐标系下，故 $u_+ = 0$)：

表 12.3

材 料	g(km/s)	h	ρ_0(g/cm³)	Γ_0
铝合金($\frac{\text{Al : Cu : Mg : Mn}}{93.4 : 4.5 : 1.5 : 0.6}$)	5.328	1.338	2.785	2.000
铝合金($\frac{\text{Al : Cu : Si}}{93.0 : 3.5 : 2.0}$)	5.041	1.420	2.833	2.100
铜	3.940	1.489	8.930	1.990
低碳钢(含C0.18%)*	3.574	1.920	7.850	1.690
不锈钢($\frac{\text{Fe : Cr : Ni : Mn : Si : C}}{68 : 19 : 10 : 2 : 1 : 0.08}$)	4.569	1.400	7.896	2.170
铀钼合金($\frac{\text{U : Mo}}{97 : 3}$)	2.565	1.531	18.450	2.030
碳化钨	4.920	1.339	15.020	1.500
聚乙烯(低密度)	2.901	1.481	0.915	1.644
聚苯乙烯	2.746	1.319	1.044	1.180
有机玻璃(商名 Plexiglass)	2.572	1.536	1.185	0.970
环氧树脂(含乙二胺 14%)	2.678	1.520	1.198	1.130
酚醛树指(商名 Durite)	2.847	1.404	1.370	0.500

* 对于低碳钢，本表数据不全，参见(12.330)式。

$$\begin{cases} u_- = -\rho_+ U(V_- - V_+) \\ p_- - p_+ = \rho_+ U u_- \\ e_- - e_+ = \dfrac{p_- u_-}{\rho_+ U} - \dfrac{1}{2}(u_-)^2 \\ p = f(V,e) \end{cases} \tag{12.328}$$

不管是冲击波关系式(12.327)，还是式(12.328)，在波前的量已知的情况下，均为四个方程五个未知量，所以方程组不封闭。要想求得确定的解，必须另加关系式。

由(12.328)式或(12.327)式可以给出冲击波后两个未知量间的关系式,如 p_- 与 V_-,p_- 与 U,p_- 与 e_-,U 与 u_-,……。它们之中的每一个都称作冲击绝热曲线或雨贡纽曲线。

冲击绝热曲线一般需要从实验测量确定,最容易测量的是 U 与 u_- 曲线。经过对广泛材料的大量实验表明,在不发生冲击相变的相当宽的实验压力范围内,U 与 u_- 曲线呈线性关系:

$$U = g + hu_- \tag{12.329}$$

材料参数 g、h 的数据很易查得,如见表 12.3。详见附表 12.2 和 12.3。对于个别材料 U 与 u_- 关系偏离线性,需要增添二次项,如取成:

$$U = g + hu_- + q_0 u_-^2 \tag{12.330}$$

如对于低碳钢,则须取如上形式,对于它 $q_0 = -0.068(\text{s/km})$。

材料常数 g 非常接近材料的体声速 $a_{m_0} = \sqrt{K/\rho_0}$(其中 K 为体积模量,见(12.176)式,关于 a_{m_0} 取值,见附表 12.2),即有

$$g \approx a_{m_0} = \sqrt{K/\rho_0} \tag{12.331}$$

冲击绝热曲线式(12.329)或(12.330)的地位很重要,一方面利用它加上(12.328)或(12.327)式可以完全确定冲击波阵面上的物理量(假若 $p = f(V,e)$ 的函数形式已知的话);另一方面在状态方程 $p = f(V,e)$ 未知的情况下,可以由它再利用(12.328)的前三个式子求解比内能 e 的表达式,即求状态方程 $p = f(V,e)$,这种方法在高压状态方程的研究中具有重要地位。

12.19 粘弹性本构关系

在 § 12.8 中研究了无记忆的简单材料——弹性物体,它的本构关系取(12.136)式的形式。按本构原理,对于具有短期记忆(short memory)的简单材料,其本构关系为

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(\mathbf{E}, \dot{\mathbf{E}})$$

即材料的应力除依赖应变 $\mathbf{E}$ 外,还依赖应变率 $\dot{\mathbf{E}}$。具有这种性质的简单材料为动载下的面体。

固体在脉冲载荷作用下的特征之一,是本构方程与应变率相关,即存在粘性效应。不过应变率效应对某些材料是不敏感的,可以忽略;另一方面,某些材料对应变率虽然敏感,但可利用一定形式的动载本构关系予以近似,如前面所述的那些本构方程。然而,对于有些材料对应变率非常敏感,如许多高分子化合物(macromolecular compound),像火箭推进剂、炸药、橡胶和各种人造及天然纤维织物(propallant, rubber, explosive, and various fabrics of man-made and natural fibre)……;另一方面,有些材料虽然在常温下对应变率不敏感,可在高温下则不然,如某些金属。

所谓粘弹物体,就是它既具有固体的变形的弹性性质,又具有液体流动的粘性性质。描述弹性固体最简单的本构关系是胡克定律;而描述粘性液体最简单的本构关系是牛顿定律——应力与速度梯度之间成线性关系。如下先研究一维粘弹,然后简述一下三维粘弹以及弹粘塑的本构关系。

12.19.1 **粘弹本构关系**(constitutive relations for viscoelastic body)

线弹固体的一维本构关系为

$$\sigma = E\epsilon \tag{12.332}$$

粘性液体的一维本构关系为

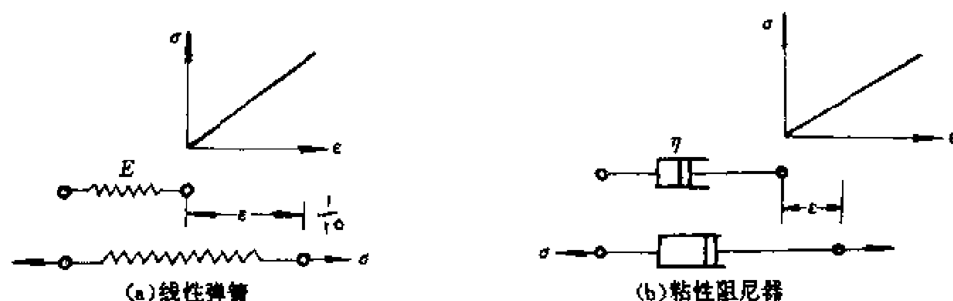
$$\sigma = \eta \frac{\partial u}{\partial x} \tag{12.333}$$

其中η为粘性系数,u为速度,E为杨氏模量(亦有的作者,将E称作弹簧常数,并将E取成(12.173)式所示的剪切模量G,从而E则不能作为"真正的"杨氏模量)。据(12.96)式,(12.333)式可写成

$$\dot{\sigma} = \eta\dot{\epsilon} = \eta \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} \tag{12.334}$$

但在上式的ϵ则不必区分它是自然应变,还是习用应变,因现考虑的是弹性小变形。同时,对于坐标,亦不再区分是空间坐标,还是物质坐标。也不再区别物质导数与空间导数,即认为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial}{\partial t}$$



(a)线性弹簧　(b)粘性阻尼器

图12.31　粘弹元件

现以弹簧(spring)代表弹性固体,以阻尼器(粘壶,dashpot)代表粘性液体,见图12.31。将它们视作"元件"(component),粘弹介质可以想象成是它们的某种组合(combination),即由它们构成不同的粘弹本构方程。



图12.32　麦克斯韦体

麦克斯韦体:

所谓麦克斯韦体(Maxwell body),即麦克斯韦模型(Maxwell model),它是由一个弹簧和一个阻尼器串联(in series),见图12.32. 显然加在每个元件上的力相等,而总伸长为两个元件伸长之和,于是根据(12.332)和(12.334)式得到该模型的本构关系为

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{12.335}$$

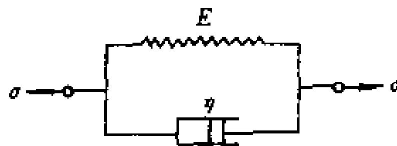


图12.33　开尔文体

开尔文体：

所谓开尔文体(Kelvin body)，即开尔文模型(Kelvin model)，该模型亦称作弗稿特体(Voigt body)，这是一个弹簧和一个阻尼器并联(in parallel)，见图12.33。显然，加在系统上的力由两者承担，而二者伸长相同，于是根据式(12.332)和(12.334)得到该模型的本构关系为

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \tag{12.336}$$

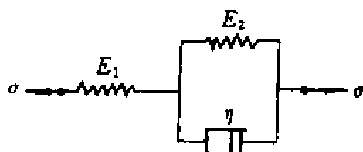


图12.34 标准线性固体

标准线性固体：

所谓标准线性固体(standard linear solid)，即为其元件按图12.34那样组合，其本构关系为在开尔文模型的基础上再串联一个弹簧，根据式(12.332)和(12.334)则有

$$(E_1 + E_2)\sigma + \eta\dot{\sigma} = E_1E_2\varepsilon + E_1\eta\dot{\varepsilon} \tag{12.337}$$

还可组成如图12.35所示的四个元件组成的模型，即开尔文模型与麦克斯韦模型串联，其本构关系可写成如下形式

$$a_2\ddot{\sigma} + a_1\dot{\sigma} + a_0\sigma = b_2\ddot{\varepsilon} + b_1\dot{\varepsilon} + b_0\varepsilon \tag{12.338}$$

其中a_0、a_1、a_2和b_0、b_1、b_2均由图示的参数E_1、η_1、E_2、η_2构成。

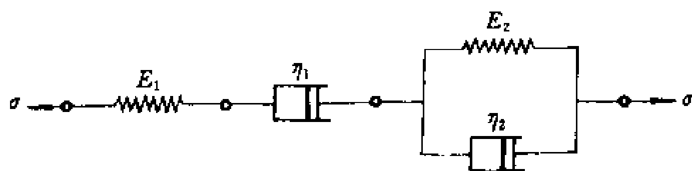


图12.35

为了表述和推导的方便，引进一个算子——线性时间微分算子(linear differential time operator)：

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tag{12.339}$$

作为算子它可以参加运算。利用算子可将式(12.338)表成

$$\{a_2\partial_t^2 + a_1\partial_t + a_0\}\sigma = \{b_2\partial_t^2 + b_1\partial_t + b_0\}\varepsilon$$

12.19.2 广义的粘弹本构关系

几个元件的串联或并联有时不能很好地描述粘弹行为，实际问题往往需要若干个不同元件的串联与并联，即构成了广义模型，例如：

广义开尔文模型，它为若干个(n个)开尔文模型的串联，如图12.36所示。利用式(12.339)所示的算子，可以写出本构方程为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\{E_1 + \eta_1\partial_t\}} + \frac{\sigma}{\{E_2 + \eta_2\partial_t\}} + \cdots + \frac{\sigma}{\{E_n + \eta_n\partial_t\}} \tag{12.340}$$

广义麦克斯韦模型，它是若干个(n个)麦克斯韦体的并联，如图12.37所示，利用微分算子，可以写出该模型的本构方程为

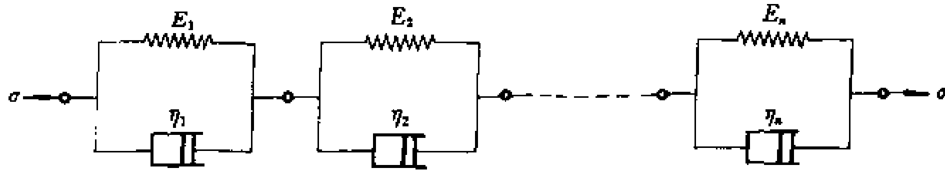


图 12.36

$$\sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/E_1 + 1/\eta_1\}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/E_2 + 1/\eta_2\}} + \cdots + \frac{\dot{\varepsilon}}{\{\partial_t/E_n + 1/\eta_n\}} \qquad (12.341)$$

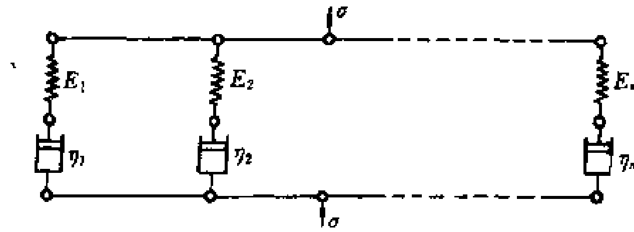


图 12.37

一般模型：

按照上述的办法，为了描述一般固体的一维粘弹行为，可以将这两种元件取更多个做更复杂的并串联，所构成的本构关系类似于(12.338)式，即为

$$a_n \frac{\partial^n \sigma}{\partial t^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1}\sigma}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + a_0 \sigma = b_m \frac{\partial^m \varepsilon}{\partial t^m} + b_{m-1} \frac{\partial^{m-1}\varepsilon}{\partial t^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + b_0 \varepsilon$$

其中 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ 和 $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_1, b_0$ 均为常数。将上写成缩简形式：

$$\{A\}\sigma = \{B\}\varepsilon \qquad (12.342)$$

式中的算子 $\{A\}$ 和 $\{B\}$ 为

$$\{A\} = \sum_{l=0}^{n} a_l \frac{\partial^l}{\partial t^l}, \qquad \{B\} = \sum_{l=0}^{m} b_l \frac{\partial^l}{\partial t^l} \qquad (12.343)$$

12.19.2 三维粘弹本构关系

在建立三维线性粘弹理论时，一般是将球量部分和偏量分开，即

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{kk} \\ \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_m \delta_{ij}, \quad \varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk} \end{cases} \qquad (12.344)$$

然后将一维的粘弹本构(12.342)式推广，则有：

$$\begin{cases} \{A\} s_{ij} = 2\{B\} e_{ij} \\ \{P\} \sigma_m = 3\{Q\} \varepsilon_m \end{cases} \qquad (12.345)$$

在上式中 $\{A\}$、$\{B\}$、$\{P\}$、$\{Q\}$ 为(12.343) 式所示的那样微分算子，之所以在算子前面乘以倍数，是为了同(12.175) 式在形式上取得某种一致。实际上所有的材料对于流体静压力 $p = -\sigma_m$ 的响应基本是弹性的，即 $\{P\}$ 和 $\{Q\}$ 可取成常数，于是(12.345)写成

$$\begin{cases}\{A\}s_{ij} = 2\{B\}e_{ij} \\ -p = \sigma_m = 3K\varepsilon_m\end{cases} \tag{12.346}$$

其中 K 为体积模量，见(12.176)式。式(12.345)或(12.346)就是一般粘弹体三维变形的本构方程。

12.20 蠕变和松弛现象

蠕变和松弛(creep and relaxation)现象是作为粘弹现象的典型代表，同时也是检验材料粘弹性质的两个最基本的实验。

所谓蠕变，是指在材料中作用的应力恒定，但应变却随时间改变的现象。

所谓松弛，是指在材料中应变恒定，但应力却随时间改变的现象。

这两种现象打破了：我们在应变率无关理论中所建立的"在某个时刻有一应力值，马上就会有一确定不变的应变值与之对应；反之亦然"的观念，即应力与应变不再是瞬时平衡了。

12.20.1 蠕变和松弛实验

蠕变和松弛实验可以用一维拉伸(压缩)或简单剪切(simple shear)来实现。

对于蠕变实验，是将粘弹试件(viscoelastic specimen)突加一应力 σ_0 且保持不变，然后测量应变随时间变化。

对于松弛实验，是将粘弹试件突加一应变 ε_0 且保持不变，然后测量其应力随时间的变化。

12.20.2 蠕变和松弛的数学描述

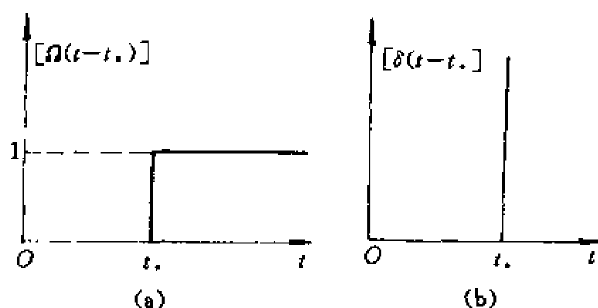


图 12.38

1. 单位阶跃函数和单位脉冲函数

为了更方便地描述突加载荷和突加载荷变化率，亦是为了将这样的初始条件直接纳入本构方程中，所以引进两个特殊函数。

对于突加并保持恒定的载荷使用单位阶跃函数(unit step function) $[\Omega(t-t_*)]$，如图 2.38(a)所示，其中 t_* 为大于零的某个任取的量，单位阶跃函数定义作

$$[\Omega(t-t_*)] = \begin{cases}0, & t < t_* \\ 1, & t \geqslant t_*\end{cases} \tag{12.347}$$

对于突加瞬逝载荷，即突加脉冲，使用单位脉冲函数(unit impulse function)，即狄拉克函数(Direc delta function)，如图 12.38(b)所示，它定义作

$$[\delta(t-t_*)] = \frac{\mathrm{d}[\Omega(t-t_*)]}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} 0, & t \neq t_* \\ \infty, & t = t_* \end{cases} \tag{12.348}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t-t_*)]\mathrm{d}t = 1 \tag{12.349}$$

2. *对于蠕变响应的描述*

利用阶跃函数，在 $t=0$ 即 $t_*=0$ 时的突加恒值载荷 σ_0 可表成

$$\sigma = \sigma_0[\Omega(t)] \tag{12.350}$$

将上式代进(12.336)所示的开尔文体中，给出

$$\dot{\varepsilon} + \varepsilon/\tau = \frac{\sigma}{\eta} = \frac{\sigma_0}{\eta}[\Omega(t)] \tag{12.351}$$

其中 $\tau = \eta/E$，称作**弛豫时间**(retardation time)) (12.352)

将(12.351)式两边同乘以 $\exp(t/\tau)$，并利用 ε 在 $t=-\infty$ 时为零，积分后给出

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})[\Omega(t)] \tag{12.353}$$

这就是开尔文体的蠕变描述，见图 12.39，尽管所加的载荷(即应力)恒定，可是应变却随时间不断增长。

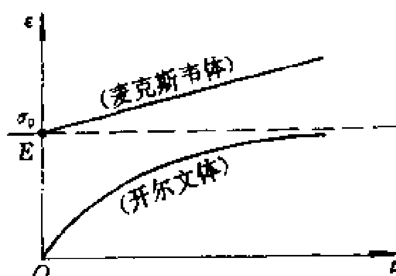


图 12.39

将式(12.350)所示的突加载荷代进(12.335)式所示的麦克斯韦体中，给出

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E}[\delta(t)] + \frac{\sigma_0}{\eta}[\Omega(t)] \tag{12.354}$$

将上式积分并利用 ε 在 $t=-\infty$ 时为零，则有

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{\sigma_0}{E}[\delta(t)] + \frac{\sigma_0}{\eta}[\Omega(t)]\right)\mathrm{d}t$$
$$= \left(\frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta}t\right)[\Omega(t)] \tag{12.355}$$

这就是麦克斯韦体的蠕变描述，见图 12.39，应变随时无限地增长。

3. *对于松弛响应的描述*

利用阶跃函数，在 $t=0$ 即 $t_*=0$ 时的突加恒值应变 ε_0 可表成

$$\varepsilon = \varepsilon_0[\Omega(t)] \tag{12.356}$$

将它代进式(12.335)中，给出

$$\frac{\sigma}{\eta} + \frac{\dot{\sigma}}{E} = \varepsilon_0[\delta(t)] \tag{12.357}$$

将上式两边同乘以 $\exp(t/\tau)$，并利用 σ 在 $t=-\infty$ 时为零，积分后给出

$$\sigma = \sigma(t) = E\varepsilon_0\mathrm{e}^{-t/\tau}[\Omega(t)] \tag{12.358}$$

这就是对麦克斯韦体松弛的描述。尽管所加的应变恒定，但应力却随时间衰减。

将式(12.356)代进式(12.336)中，给出

$$\sigma = \sigma(t) = E\varepsilon_0[\Omega(t)] + \eta\varepsilon_0[\delta(t)] \tag{12.359}$$

这就是对开尔文体松弛的描述，突加恒值应变，却在瞬间产生无限的应力，但马上恢复正常并形成恒定的应力。

12.21 蠕变函数·松弛函数·遗传积分

12.21.1 蠕变函数

对于在蠕变载荷

$$\sigma=\sigma_0[\Omega(t)] \quad 或 \quad \sigma=\sigma_0[\Omega(t-t_*)] \tag{12.360}$$

作用下的蠕变响应ε如(12.353)式(对于开尔文体)和(12.355)式(对于麦克斯韦体)所描述,即可写成

$$\varepsilon=\sigma_0\Psi(t) \quad 或 \quad \varepsilon=\sigma_0\Psi(t-t_*) \tag{12.361}$$

其中

$$\Psi(t)=\begin{cases}\mathscr{T}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})[\Omega(t)]\\(\mathscr{T}+\dfrac{t}{\eta})[\Omega(t)]\end{cases} \tag{12.362.1}$$

或

$$\Psi(t-t_*)=\begin{cases}\mathscr{T}(1-\mathrm{e}^{-(t-t_*)/\tau})[\Omega(t-t_*)]\\(\mathscr{T}+\dfrac{t-t_*}{\eta})[\Omega(t-t_*)]\end{cases} \tag{12.362.2}$$

$\mathscr{T}=\dfrac{1}{E}$:称作柔度(compliance);函数Ψ:称作蠕变函数(creep function)

对于图12.36所示的广义开尔文体在(12.360)式所示的载荷作用下,其作用在该体上的总应力σ与作用在各开尔文体上的分应力σ_1、σ_2、…、σ_n之间的关系、总应变ε与各分应变ε_1、ε_2、…、ε_n之间的关系为

$$\begin{cases}\sigma=\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_n=\sigma_0[\Omega(t)]\\\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i\end{cases} \tag{12.363}$$

而对于第i个开尔文体有

$$\dot{\varepsilon}_i+\frac{\varepsilon_i}{\tau_i}=\frac{\sigma}{\eta_i}=\frac{\sigma_0}{\eta_i}[\Omega(t)] \quad , \quad \tau_i=\eta_i/E_i$$

从而求得

$$\varepsilon_i=\sigma_0\mathscr{T}_i(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_i})[\Omega(t)] \quad , \quad \mathscr{T}_i=1/E_i=\tau_i/\eta_i \tag{12.364}$$

于是由上式和(12.363)式得到

$$\varepsilon=\sigma_0\Psi(t) \quad , \quad \Psi(t)=\sum_{i=1}^{n}\mathscr{T}_i(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_i})[\Omega(t)] \tag{12.365}$$

将广义的开尔文体推广,设$n\to\infty$,$\mathscr{T}$作为τ的连续函数,每个开尔文体都变成一个"微元体"即$\mathscr{T}_i\to\mathrm{d}\mathscr{T}=\Lambda(\tau)\mathrm{d}\tau$,于是式(12.365)变成

$$\Psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\tau)(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})[\Omega(t)]\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{\infty}\Lambda(\tau)(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\mathrm{d}\tau \tag{12.366}$$

若载荷为(12.360)式的第二式的载荷,蠕变函数$\Psi(t-t_*)$为

$$\Psi(t-t_*)=\int_{t_*}^{\infty}\Lambda(\tau)(1-\mathrm{e}^{-(t-t_*)/\tau})\mathrm{d}\tau \tag{12.367}$$

其中

$\Lambda=\Lambda(\tau)=\frac{\mathrm{d}\mathscr{T}}{\mathrm{d}\tau}$：称作延迟时间分布(distribution of retardation times)，或称延迟谱(retardation spectrum)。

12.21.2 **松弛函数**

对于在松弛载荷

$$\varepsilon=\varepsilon_0[\Omega(t)] \quad \text{或} \quad \varepsilon=\varepsilon_0[\Omega(t-t_*)] \tag{12.368}$$

作用下的松弛响应 σ，如(12.359)式(对于开尔文体)和(12.358)式(对于麦克斯韦体)所描述，即可写成

$$\sigma=\varepsilon_0\Phi(t) \quad \text{或} \quad \sigma=\varepsilon_0\Phi(t-t_*) \tag{12.369}$$

其中

$$\Phi(t)=\begin{cases}E[\Omega(t)]+\eta[\delta(t)]\\ E\mathrm{e}^{-t/\tau}[\Omega(t)]\end{cases} \quad \text{或} \quad \Phi(t-t_*)=\begin{cases}E[\Omega(t-t_*)]+\eta[\delta(t-t_*)]\\ E\mathrm{e}^{-(t-t_*)/\tau}[\Omega(t-t_*)]\end{cases} \tag{12.370}$$

函数 Φ：称作松弛函数(relaxation function)。

对于图 12.37 所示的广义麦克斯韦体在(12.369)式的载荷作用下，其作用在该体上的总应变 ε 与作用在各麦克斯韦体上的分应变 ε_1、ε_2、…、ε_n 之间的关系、总应力 σ 与各分应力 σ_1、σ_2、…、σ_n 之间的关系为

$$\begin{cases}\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_n=\varepsilon_0[\Omega(t)]\\ \sigma=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\end{cases} \tag{12.371}$$

而对于第 i 个麦克斯韦体有

$$\dot{\sigma}_i+\frac{\sigma_i}{\tau_i}=E_i\dot{\varepsilon}=\varepsilon_0E_i[\delta(t)]$$

从而求得

$$\sigma_i=\varepsilon_0E_i\mathrm{e}^{-t/\tau_i}[\Omega(t)]$$

于是由上式和(12.371)式得到

$$\sigma=\varepsilon_0\Phi(t) \quad , \quad \Phi(t)=\sum_{i=1}^{n}E_i\mathrm{e}^{-t/\tau_i}[\Omega(t)] \tag{12.372}$$

将广义的麦克斯韦体推广，设 $n\to\infty$，E 作为 τ 的连续函数，每个麦克斯韦体都变成一个“微元体”即 $E_i\to \mathrm{d}E=\mathscr{P}(t)\mathrm{d}\tau$，于是式(12.372)变成

$$\begin{cases}\Phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{P}(\tau)\mathrm{e}^{-t/\tau}[\Omega(t)]\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{\infty}\mathscr{P}(\tau)\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}\tau\\ \sigma=\varepsilon_0\Phi(t)\end{cases} \tag{12.373}$$

若载荷为(12.368)的第二式的载荷，松弛函数 $\Phi(t-t_*)$ 为

$$\begin{cases}\Phi(t-t_*)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{P}(\tau)\mathrm{e}^{-(t-t_*)/\tau}[\Omega(t-t_*)]\mathrm{d}\tau=\int_{t_*}^{\infty}\mathscr{P}(\tau)\mathrm{e}^{-(t-t_*)}\mathrm{d}\tau\\ \sigma=\varepsilon_0\Phi(t-t_*)\end{cases} \tag{12.374}$$

其中

$\mathscr{P}=\mathscr{P}(\tau)=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau}$：称作松弛时间分布(distribution of relaxation times)，或称松弛

谱(relaxation spectrum)。

12.21.3 **遗传积分**

上面所考虑的蠕变响应和松弛响应都是突加的一次性恒值载荷(即单级平台载荷)所引起的。如下将研究连续加载,为此先研究阶梯式加载(即多级平台加载),如图 12.40 所示,作为过渡。

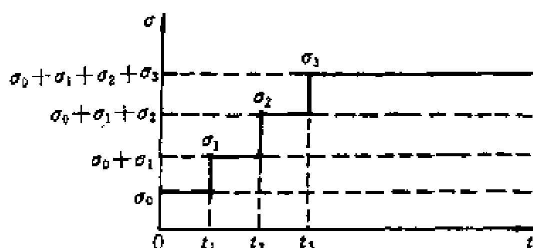


图 12.40

1. 蠕变的遗传积分

在一个开尔文体上作用着如图 12.40 所示的阶梯式的应力载荷,求解由此所引起的应变响应。由于它遵循线性的粘弹本构关系,所以叠加原理可用。其整个应力(总应力)所引起的应变效应等于各分应力所引起的应变效应之和。于是可把图示的应力载荷 σ 分成 σ_0、σ_1、…、σ_m,且在 $t=0$、$t=t_1$、…、$t=t_m$ 时刻各自独立地作用在同为自然态(即初始时 $\sigma=\varepsilon=0$) 的开尔文体上,即其载荷表成

$$\sigma = \sigma_{(0)} + \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \cdots + \sigma_{(m)}$$

$$\sigma_{(0)} = \sigma_0[\Omega(t)],\ \sigma_{(1)} = \sigma_1[\Omega(t-t_1)],\ \cdots,\ \sigma_{(m)} = \sigma_m[\Omega(t-t_m)] \quad (12.375)$$

据(12.336)式,对于单一开尔文体有

$$\dot{\varepsilon} + \varepsilon/\tau = \sigma/\eta \quad (12.376)$$

于是在式(12.375)所示的载荷作用下,分别有

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_0 + \varepsilon_0/\tau = \sigma_{(0)}/\eta = \dfrac{\sigma_0}{\eta}[\Omega(t)] \\ \dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_1/\tau = \sigma_{(1)}/\eta = \dfrac{\sigma_1}{\eta}[\Omega(t-t_1)] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\varepsilon}_m + \varepsilon_m/\tau = \sigma_{(m)}/\eta = \dfrac{\sigma_m}{\eta}[\Omega(t-t_m)] \end{cases} \quad (12.377)$$

将(12.377)的诸式加起来,则有

$$(\dot{\varepsilon}_0 + \dot{\varepsilon}_1 + \cdots + \dot{\varepsilon}_m) + (\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m)/\tau = \sigma/\eta$$

将该式与(12.376)式比较,则推出由各分应力产生的诸应变之和,即为总应力 σ 所产生的应变 ε,即

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m \equiv \varepsilon$$

由(12.377)式所求得的解为

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \sigma_0\Psi(t) = \dfrac{\sigma_0}{E}(1-e^{-t/\tau})[\Omega(t)] \\ \varepsilon_1 = \sigma_1\Psi(t-t_1) = \dfrac{\sigma_1}{E}(1-e^{-(t-t_1)/\tau})[\Omega(t-t_1)] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_m = \sigma_m\Psi(t-t_m) = \dfrac{\sigma_m}{E}(1-e^{-(t-t_m)/\tau})[\Omega(t-t_m)] \end{cases} \quad (12.378)$$

即有

$$\begin{cases}\Psi(t-t_i)=\dfrac{1}{E}(1-\mathrm{e}^{-(t-t_i)/\tau})[\Omega(t-t_i)] \\ i=0,1,2,\cdots,m \quad , \quad t_0=0\end{cases} \tag{12.379}$$

由(12.378)式则求得总应变 ε 为

$$\varepsilon=\sigma_0\Psi(t)+\sigma_1\Psi(t-t_1)+\cdots+\sigma_m\Psi(t-t_m)=\sum_{i=0}^{m}\sigma_i\Psi(t-t_i) \tag{12.380}$$

对于图 12.36 所示的广义开尔文体，若在图 12.40 所示的载荷作用下，则在其组成的每个开尔文体上所产生的应变应如式(12.380)所示，于是对于第 i 个开尔文体所产生的应变 ε_i 为

$$\varepsilon_i=\varepsilon_i(t)=\sigma_0\Psi_i(t)+\sigma_1\Psi_i(t-t_1)+\cdots+\sigma_m\Psi_i(t-t_m)$$

作用在广义开尔文体上的总应变 ε

$$\varepsilon=\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i=\sigma_0\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(t)+\sigma_1\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(t-t_1)+\cdots+\sigma_m\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(t-t_m) \tag{12.381}$$

其中

$$\begin{cases}\Psi_i(t-t_j)=\mathscr{T}_i(1-\mathrm{e}^{-(t-t_j)/\tau_i})[\Omega(t-t_j)] \\ \mathscr{T}_i=1/E_i, \quad j=0,1,2,\cdots,m \quad , \quad t_0=0\end{cases} \tag{12.382}$$

对于推广的广义开尔文体，即 $n\to\infty,\mathscr{T}_i\to\Lambda(\tau)\mathrm{d}\tau$，则式(12.381)中的求和项变成：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(t)\to\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\tau)(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})[\Omega(t)]\mathrm{d}\tau=\Psi(t) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(t-t_1)\to\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\tau)(1-\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau})[\Omega(t-t_1)]\mathrm{d}\tau=\Psi(t-t_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Psi_i(t-t_m)\to\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\tau)(1-\mathrm{e}^{-(t-t_m)/\tau})[\Omega(t-t_m)]\mathrm{d}\tau=\Psi(t-t_m)\end{cases} \tag{12.383}$$

因此，由(12.381)式得到推广的广义开尔文体上的总应变 ε 为

$$\begin{aligned}\varepsilon=\varepsilon(t)&=\sigma_0\Psi(t)+\sigma_1\Psi(t-t_1)+\cdots+\sigma_m\Psi(t-t_m)\\&=\sum_{j=0}^{m}\sigma_j\Psi(t-t_j)\end{aligned} \tag{12.384}$$

如上研究了在图 12.40 所示的阶梯式应力载荷下，单个开尔文体、广义开尔文体以及推广的广义开尔文体上的应变响应。现在研究在图 12.41 所示的光滑连续应力载荷作用下，对如上所述的各开尔文体上的应变响应。对于这种连续载荷所产生的应变可以这样获得：将连续的应力载荷视作为"无穷个台阶的阶梯式载荷"，每个小台阶为 $\mathrm{d}\sigma$，于是问题变成图 12.40 所示的阶梯式加载，

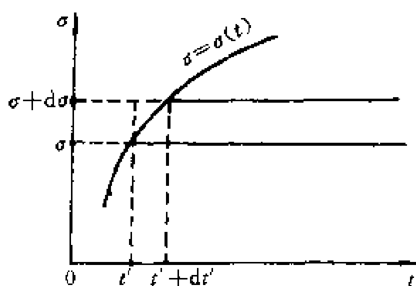


图 12.41

即在(12.380)式或在(12.384)式中

$$t_j \to t' \quad , \quad \sigma_j \to \mathrm{d}\sigma \quad , \quad \mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}\sigma(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t'$$

于是光滑连续的应力载荷作用下的产生的应变为(参见(12.384)式):

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t'}\Psi(t-t')\mathrm{d}t' \quad (\text{加载从零开始}, \sigma_0 = 0) \tag{12.385}$$

或

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \sigma_0\Psi(t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t'}\Psi(t-t')\mathrm{d}t' \quad (\text{加载从 } \sigma_0 \text{ 开始}, \sigma_0 \neq 0) \tag{12.386}$$

从式(12.385)或(12.386)得知,对于初始处于自然态的开尔文体,在从 $t=0$ 开始的连续载荷作用下,其任何时刻($t=t$ 时)的应变响应 $\varepsilon(t)$ 都与从 $t=0$ 到 $t=t$ 的整个应力加载过程有关,即依赖整个应力历史,所以将这两个积分称作蠕变遗传积分(creep hereditary integral),简称:蠕变积分。

2. 松弛的遗传积分

在单级平台式恒值载荷 ε_0 的作用下,麦克斯韦体的松弛响应为式(12.373)或(12.374)所示。若载荷改为如图 12.40 所示的阶梯式应变载荷 ε 的作用下,其应力响应类似于式(12.380)或(12.384),即有

$$\sigma = \sigma(t) = \sum_{j=0}^{m} \varepsilon_j \Phi(t-t_j) \tag{12.387}$$

若阶梯式的松弛载荷改为如图 12.41 所示的光滑连续载荷,即以微元量 $\mathrm{d}\varepsilon$ 代替每个台阶,即在上式中

$$t_j \to t' \quad , \quad \varepsilon_j \to \mathrm{d}\varepsilon \quad , \quad \mathrm{d}\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t'$$

于是光滑连续的应变载荷所产生的应力为

$$\sigma = \sigma(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t'}\Phi(t-t')\mathrm{d}t' \quad (\text{加载从零开始}, \varepsilon_0 = 0) \tag{12.388}$$

或

$$\sigma = \sigma(t) = \varepsilon_0\phi_1(t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t'}\Phi(t-t')\mathrm{d}t' \quad (\text{加载从 } \varepsilon_0 \text{ 开始}, \varepsilon_0 \neq 0) \tag{12.389}$$

式(12.388)或(12.389)称作松弛遗传积分,简称松弛积分。

12.21.4 蠕变函数 $\Psi(t)$ 与松弛函数 $\Phi(t)$ 之间的关系

描述一个给定材料的粘弹特征,可以使用蠕变积分,如(12.385)式;亦可使用松弛积分,如(12.388)式。在这两种积分中均出现蠕变函数 $\Psi(t)$ 和松弛函数 $\Phi(t)$,它们的函数形式与施加的载荷无关,只与具体的粘弹模型有关。如果 $\Psi(t)$ 和 $\Phi(t)$ 是对于同一个材料,即对同一个粘弹模型,它们之间显然应有固定的关系。这种关系一般是不容易找,但利用拉普拉斯变换可方便地获得。

1. 关于拉普拉斯变换与卷积

函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换(Laplace's transform)的象函数(image function) $\overline{f(\zeta)}$ 定义作

$$\overline{f(\zeta)} = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t \quad \text{亦记作} \overline{f(\zeta)} = L[f(t)] \tag{12.390}$$

拉普拉斯变换具有如下性质

$$L\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \zeta L[f(t)] - f(0) \tag{12.391}$$

其中复数 ζ 为变换参数(transform parameter)。由象函数求原函数为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \overline{f(\zeta)}\mathrm{e}^{t\zeta}\mathrm{d}\zeta \tag{12.392}$$

式中 η 为一个实数参量。

卷积(convolution)。函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积 $\mathscr{F}(t)$ 定义作

$$\mathscr{F}(t) = \int_0^t f_1(t')\cdot f_2(t-t')\mathrm{d}t' = \int_0^t f_2(t')\cdot f_1(t-t')\mathrm{d}t' \tag{12.393}$$

亦记作

$$\mathscr{F}(t) = f_1(t) * f_2(t) \tag{12.394}$$

卷积在作拉普拉斯变换时具有如下性质:

$$\overline{\mathscr{F}(\zeta)} = L[\mathscr{F}(t)] = L[f_1(t)]\cdot L[f_2(t)] = \overline{f_1(\zeta)}\cdot\overline{f_2(\zeta)} \tag{12.395}$$

2. $\Psi(t)$ 与 $\Phi(t)$ 间的关系

根据蠕变遗传积分(12.385)式和松弛遗传积分(12.388)式,并按照(12.393)式和(12.394)式的定义,则有

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\sigma(t')}{\mathrm{d}t'}\Psi(t-t')\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} * \Psi(t), \quad \varepsilon(0) = 0 \tag{12.396}$$

$$\sigma(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t')}{\mathrm{d}t'}\Phi(t-t')\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} * \Phi(t), \quad \sigma(0) = 0 \tag{12.397}$$

将如上的 $\varepsilon(t)$ 和 $\sigma(t)$ 作拉普拉斯变换,并利用变换性质(12.395)式和(12.391)式,则有

$$L[\varepsilon(t)] = L\left[\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\right]\cdot L[\Psi(t)] = \zeta L[\sigma(t)]\cdot L[\Psi(t)]$$

$$L[\sigma(t)] = L\left[\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\right]\cdot L[\Phi(t)] = \zeta L[\varepsilon(t)]\cdot L[\Phi(t)]$$

将如上两式相乘,则推出

$$L[\Psi(t)]\cdot L[\Phi(t)] = 1/\zeta^2$$

即

$$\overline{\Psi(\zeta)}\cdot\overline{\Phi(\zeta)} = 1/\zeta^2 \tag{12.398}$$

这就是蠕变函数与松弛函数之间的关系。

12.22 三维粘弹体对加载的响应

如上研究了应力应变均为一维的理想情况下的一维粘弹模型及其响应,现在研究三维粘体对加载的响应。

12.22.1 线性粘弹杆在简单拉伸时的蠕变响应

应力应变均为一维的理想粘弹模型(即一维应力模型),在用于描述实际的粘弹杆的简单拉伸时,它们只能作为一定程度的近似。严格地讲,应力与应变同为一维的情形是不存在的,如对一维应变问题,应变虽是一维的,但应力却是三维的;对于简单拉伸,虽然应

力是一维的，但应变却是三维的，所以杆的简单拉伸是三维问题。如下我们将按三维模型来研究线性粘弹杆的对简单拉伸的蠕变响应。

一个开尔文体的粘弹杆，在 $t=0$ 时突加一个恒值拉伸载荷 σ_0，即有

$$\sigma_{11}=\sigma_0[\Omega(t)] \quad , \quad \sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0 \tag{12.399}$$

现在研究的是三维粘弹情况，三维线性粘弹的本构关系如式(12.346)所示，即

$$\begin{cases}\{A\}s_{ij}=2\{B\}e_{ij}\\ \sigma_m=3K\varepsilon_m\end{cases} \tag{12.400}$$

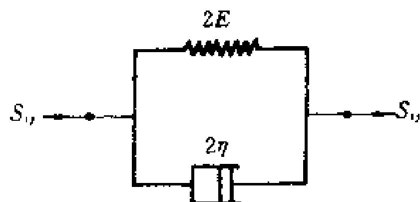


图 12.42

如上的第一式完全是仿照一维粘弹本构关系式(12.342)得来那样，亦是将“弹簧和阻尼器”这两种元件按各种方式进行组合而得到的。不过所对应的不再是应力与应变关系（σ 与 ε），而是偏应力与偏应变间的关系（即 s_{ij} 与 e_{ij} 间的关系）。由于现研究的杆为开尔文体，所以本构模型的构成如图 12.42 所示，按该图所示的模型，则有

$$s_{ij}=2Ee_{ij}+2\eta\dot{e}_{ij}=2\left\{E+\eta\frac{\partial}{\partial t}\right\}e_{ij} \tag{12.401}$$

即相当于在(2.400)式中

$$\{A\}=1 \quad , \quad \{B\}=\left\{E+\eta\frac{\partial}{\partial t}\right\}$$

由(12.401)式给出在拉伸方向的偏应力与偏应变的关系

$$s_{11}=2\left\{E+\eta\frac{\partial}{\partial t}\right\}e_{11} \tag{12.402}$$

而

$$\begin{cases}s_{11}=\sigma_{11}-\sigma_m \quad , \quad \sigma_m=\dfrac{1}{3}\sigma_{kk}=\dfrac{1}{3}\sigma_{11}=\dfrac{1}{3}\sigma_0[\Omega(t)]\\ e_{11}=\varepsilon_{11}-\varepsilon_m \quad , \quad \varepsilon_m=\dfrac{1}{3K}\sigma_m=\dfrac{1}{9K}\sigma_0[\Omega(t)]\end{cases} \tag{12.403}$$

于是由(12.402)和(12.403)式得到

$$\dot{\varepsilon}_{11}+\varepsilon_{11}/\tau=\sigma_0[\Omega(t)](3K+E)/(9\eta K)+\sigma_0[\delta(t)]/(9K) \tag{12.404}$$

上式求解给出

$$\varepsilon_{11}=\sigma_0(3K+E)(1-e^{-t/\tau})[\Omega(t)]/(9EK)+\sigma_0e^{-t/\tau}[\Omega(t)]/(9K) \tag{12.405}$$

这就是开尔文杆在恒应力拉伸时的蠕变响应，它与完全按一维粘弹模型的蠕变响应不同，见(12.353)式。

在(12.405)式中当 $t\to\infty$ 时，即

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon_{11}=\sigma_0(3K+E)/(9EK)=\sigma_0/E_* \tag{12.406}$$

其中

$$E_*=\frac{3K+E}{9EK}$$

即作为极限情况粘性不起作用，其响应效果同无粘性的简单拉伸一样。如果将上式中的 E

取成(12.173)式所示的剪切模量G,则E_*就成了(12.170)式中"真正的"杨氏模量,式(12.406)便是无粘性的弹性简单拉伸的结果。

如上对开尔文粘弹杆在简单拉伸下,给出了轴向应变响应(12.405)式,它可写成$\varepsilon_{11} = \sigma_0\Psi(t)$形式,同一维粘弹一样,$\Psi(t)$亦称作蠕变函数。如若作为一般情形的三维粘弹体,在初始($t=0$)的突加恒值应力载荷作用下,即

$s_{ij} = s_{ij}^0[\Omega(t)]$, $s_{ij}^0 = \text{const}$(如若视作张量各分量,则可能为6个不同常数)

$\sigma_m = \sigma_m^0[\Omega(t)]$, $\sigma_m^0 = \text{const}$

在如上载荷作用下,根据式(12.345)或(12.346)的本构方程,可以给如下形式的蠕变响应

$$e_{ij} = s_{ij}^0\Psi_s(t) \quad , \quad \varepsilon_m = \sigma_m^0\Psi_V(t) \tag{12.407}$$

在上式中$\Psi_s(t)$和$\Psi_V(t)$分别是对于偏量和球量(deviatoric and spherical parts)的蠕变函数。同理,在初始突加的恒值应变载荷作用下,粘弹体的松弛响应亦可表成

$$\begin{cases} s_{ij} = e_{ij}^0\Phi_s(t) \quad , \quad e_{ij}^0 = \text{const} \\ \varepsilon_m = \sigma_m^0\Phi_V(t) \quad , \quad \sigma_m^0 = \text{const} \end{cases} \tag{12.408}$$

在上式中Φ_S和Φ_V分别是对于偏量和球量的松弛函数。

12.22.2 **蠕变积分和松弛积分**

同一维粘弹一样,如果突加恒值载荷改为光滑连续加载,则式(12.407)变成蠕变遗传积分(参见(12.385)式)

$$\begin{cases} e_{ij} = \int_0^t \Psi_s(t-t')\dfrac{ds_{ij}}{dt'}dt' \\ \varepsilon_m = \int_0^t \Psi_V(t-t')\dfrac{d\sigma_m}{dt'}dt' \end{cases} \tag{12.409}$$

式(12.408)变成松弛遗传积分(参见(12.388)式)

$$\begin{cases} s_{ij} = \int_0^t \Phi_s(t-t')\dfrac{de_{ij}}{dt'}dt' \\ \sigma_m = \int_0^t \Phi_V(t-t')\dfrac{d\varepsilon_m}{dt'}dt' \end{cases} \tag{12.410}$$

在一般的粘弹行为中,任一物理量$\mathscr{A}$的物质导数都很小(若很大,则不能按一般的常规分析办法处理,改用应力波理论或数值计算等方法解决),且局部导数$\dfrac{\partial\mathscr{A}}{\partial t}$与空间梯度grad $\mathscr{A}$以及质点速度v都是同阶小量。故$\mathscr{A}$在按空间坐标描述时,一般均略去物质导数中的迁移项(transport term),即有

$$\frac{d\mathscr{A}}{dt} = \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\text{grad}\mathscr{A} \approx \frac{\partial\mathscr{A}}{\partial t} \tag{12.411}$$

据上式,则(12.409)和(12.410)式可表成

$$\begin{cases} e_{ij} = \int_0^t \Psi_s(t-t')\dfrac{\partial s_{ij}}{\partial t'}dt' \\ \varepsilon_m = \int_0^t \Psi_V(t-t')\dfrac{\partial\sigma_m}{\partial t'}dt' \end{cases} \tag{12.412}$$

$$\begin{cases} s_{ij} = \int_0^t \Phi_s(t-t') \dfrac{\partial e_{ij}}{\partial t'} \mathrm{d}t' \\ \sigma_m = \int_0^t \Phi_V(t-t') \dfrac{\partial \varepsilon_m}{\partial t'} \mathrm{d}t' \end{cases} \tag{12.413}$$

(上式如若看成物质坐标描述，它又是式(12.409)和(12.410)的精确转形。)

12.23　粘弹问题·对应法则

在上一节，我们描述一个几何形状与加载条件都比较简单的粘弹体，按比较简单的粘弹本构模型作了处理。但是对于比较复杂的情形，则须寻求新的途径，如下将论述的对应法则(correspondence principle)便是手段之一。

12.23.1　粘弹问题与控制方程

假定有一个如图12.43所示的粘弹体，它由各向同性介质构成。在它上面作用着体力 $\boldsymbol{b}$，在其外表面的一部分 $\mathscr{S}_1$ 上作用着面力矢量 $\boldsymbol{h}$；在其表面的另一部分 $\mathscr{S}_2$ 上给出位移矢量 $\boldsymbol{g}$，假定这些量均作为时间 t 和空间坐标 x_i 的函数，即

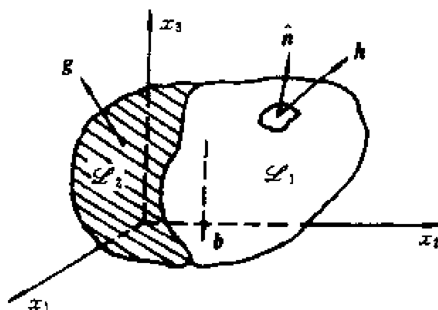


图12.43

$$\boldsymbol{b} = b_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \quad , \quad b_i = b_i(x_k,t)$$
$$\boldsymbol{h} = h_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \quad , \quad h_i = h_i(x_k,t)$$
$$\boldsymbol{g} = g_i\hat{\boldsymbol{e}}_i \quad , \quad g_i = g_i(x_k,t)$$

由于为弹性小变形，故假定：$\rho = \text{const}$；同时认为物质导数较小，物质导数可用局部导数 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ 代替，见(12.411)式。在这些条件下，描该粘弹体的控制方程和边初条件为

1. *平衡方程或运动方程*(equations of equilibrium or motion)

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad 或 \quad \sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \tag{12.414}$$

2. *应变与位移关系或应变率与速度关系*(strain-displacement relations or strain-rate-velocity relations)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \quad 或 \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{12.415}$$

3. *边界条件*(boundary conditions)

在表面 $\mathscr{S}_1$ 上　$\sigma_{ij}(x_k,t)n_j(x_k) = t_i^{(\hat{n})}(x_k,t) \equiv h_i(x_k,t)$　(12.416)

在表面 $\mathscr{S}_2$ 上　$\tilde{u}_i(x_k,t) \equiv g_i(x_k,t)$　(12.417)

在(12.416)式中，表面单位外法线 $\hat{n}(x_k)$ 本来还应依赖时间 t，因物体在变化时则表面上任一点的法向亦在变化。然而，现研究的是弹性小变形，所以表面法线的方向改变不大，故略去 $\hat{n}$ 随时间的变化。

4. *初始条件*(initial conditions)

$$\begin{cases} \tilde{u}_i(x_k,0) = \tilde{u}_i^0(x_k) \\ v_i(x_k,0) = v_i^0(x_k) \end{cases} \tag{12.418}$$

5. 本构方程(constitutive equations)

可能为如下两种形式之一:

(a) 线性微分算子形式(linear differential operator form)

$$\begin{cases} \{A\}s_{ij} = 2\{B\}e_{ij} \\ \sigma_m = 3K\varepsilon_m \end{cases} \tag{12.419}$$

(b) 遗传积分形式(hereditary integral form)

$$\begin{cases} e_{ij} = \int_0^t \Psi_s(t-t')\dfrac{\partial s_{ij}}{\partial t'}\mathrm{d}t' \\ \varepsilon_m = \int_0^t \Psi_V(t-t')\dfrac{\partial \sigma_m}{\partial t'}\mathrm{d}t' \end{cases} \tag{12.420}$$

如上方程组封闭,加上边初条件完全可以求解。然而,如上方程组是微分方程,难点在于本构方程的形式,若描述真实的粘弹行为,本构关系一般并不简单,从而造成方程难以求解,如下将谈的方法便是解决这种难点的办法之一。

12.23.2 **对应法则**

粘弹问题之所以比一般的弹性问题难以求解,就是由于时间效应问题。对应法则就是要解决这个问题。

所谓对应法则,就是将粘弹问题的方程组与边界条件通过拉普拉斯变换,将本依赖时间问题化成不依赖时间的"弹性静力学问题"的方程组及边界条件(即化成相应的"弹性"问题),这两种描述之间的对应关系,就称作对应法则。

由变换之后的方程组求得解后,再通过拉普拉斯变换的反演,便获得粘弹问题的解。如下,考虑一准静态等温问题(quasi-static isothermal problem)。

①由于问题为准静态,故不考虑惯性,运动方程变成了平衡方程,即(12.414)的第一式,将它作变换,即有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \sigma_{ij,j}\mathrm{e}^{-\xi t}\mathrm{d}t + \int_0^\infty \rho b_i \mathrm{e}^{-\xi t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\int_0^\infty \sigma_{ij}\mathrm{e}^{-\xi t}\mathrm{d}t + \rho\int_0^\infty b_i\mathrm{e}^{-\xi t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\sigma}_{ij} + \rho\bar{b}_i = \bar{\sigma}_{ij,j} + \rho\bar{b}_i \end{aligned} \tag{12.421}$$

其中

$$\bar{\sigma}_{ij} = \int_0^\infty \sigma_{ij}\mathrm{e}^{-\xi t}\mathrm{d}t \quad , \quad \bar{b}_i = \int_0^\infty b_i\mathrm{e}^{-\xi t}\mathrm{d}t \tag{12.422}$$

②将(12.415)的第一式作变换,即有

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \tag{12.423}$$

其中

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \int_0^\infty \varepsilon_{ij}\mathrm{e}^{-\xi t}\mathrm{d}t \quad , \quad \bar{u}_i = \int_0^\infty u_i\mathrm{e}^{-\xi t}\mathrm{d}t \tag{12.424}$$

③将(12.416)和(12.417)作变换,即有

在 $\mathscr{L}_1$ 上
$$\int_0^\infty \sigma_{ij}(x_k,t)n_j(x_k)\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty h_i(x_k,t)\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \bar{h}_i$$

推出
$$n_j(x_k)\int_0^\infty \sigma_{ij}(x_k,t)\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \bar{\sigma}_{ij}n_j = \bar{h}_i \tag{12.425}$$

在 $\mathscr{L}_2$ 上
$$\bar{u}_i = \int_0^\infty g_i(x_k,t)\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \bar{g}_i \tag{12.426}$$

通过拉普拉斯变换将原来随时间变化的动边界条件化成“静力学”中的边界条件，而原(12.418)式所示的初始条件在新的静力学问题中当然不出现。

④将(12.419)式作变换

假定

$$\begin{cases} s_{ij}(x_k,0) = \left.\dfrac{\partial s_{ij}(x_k,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial^2 s_{ij}(x_k,t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \cdots = \left.\dfrac{\partial^n s_{ij}(x_k,t)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = 0 \\ e_{ij}(x_k,0) = \left.\dfrac{\partial e_{ij}(x_k,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\dfrac{\partial^2 e_{ij}(x_k,t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \cdots = \left.\dfrac{\partial^m e_{ij}(x_k,t)}{\partial t^m}\right|_{t=0} = 0 \\ \sigma_m(x_k,0) = \varepsilon_m(x_k,0) = 0 \end{cases}$$

据(12.391)式与上式，则有

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial s_{ij}}{\partial t}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta\int_0^\infty s_{ij}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta\bar{s}_{ij} \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial^2 s_{ij}}{\partial t^2}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta^2\int_0^\infty s_{ij}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta^2\bar{s}_{ij} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial^n s_{ij}}{\partial t^n}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta^n\int_0^\infty s_{ij}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta^n\bar{s}_{ij} \end{cases} \tag{12.427}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial e_{ij}}{\partial t}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta\int_0^\infty e_{ij}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta\bar{e}_{ij} \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial t^2}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta^2\int_0^\infty e_{ij}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta^2\bar{e}_{ij} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial^m e_{ij}}{\partial t^m}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta^m\int_0^\infty e_{ij}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \zeta^m\bar{e}_{ij} \end{cases} \tag{12.428}$$

将(12.419)式作变换，即

$$\int_0^\infty \{A\}s_{ij}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty 2\{B\}e_{ij}\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t$$

亦即有

$$\int_0^\infty \left(a_0 s_{ij} + a_1\frac{\partial s_{ij}}{\partial t} + \cdots + a_n\frac{\partial^n s_{ij}}{\partial t^n}\right)\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \left(b_0 e_{ij} + b_1\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \cdots + b_m\frac{\partial^m e_{ij}}{\partial t^m}\right)\mathrm{e}^{-\zeta t}\mathrm{d}t$$

于是借助(12.427)和(12.428)式则有

$$\bar{A}\bar{s}_{ij} = 2\bar{B}\bar{e}_{ij} \quad 或 \quad \bar{s}_{ij} = 2\bar{G}\bar{e}_{ij} \tag{12.429}$$

其中

$$\bar{A} = \sum_{i=0}^{n} a_i\zeta^i \quad , \quad \bar{B} = \sum_{i=0}^{m} b_i\zeta^i \quad , \quad \bar{G} = \bar{B}/\bar{A} \tag{12.430}$$

式(12.419)的第二式变换成

$$\bar{\sigma}_m = \int_0^\infty \sigma_m e^{-\zeta t} dt = \int_0^\infty 3K\varepsilon_m e^{-\zeta t} dt = 3K\int_0^\infty \varepsilon_m e^{-\zeta t} dt = 3K\bar{\varepsilon}_m \qquad (12.431)$$

将变换后的(12.421)～(12.431)式归纳为

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{ij,j} + \rho\bar{b}_i = 0 \quad , \quad \rho = \text{const} \\ \bar{\varepsilon}_{ij} = \dfrac{1}{2}(\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \\ \begin{cases} \bar{\sigma}_{ij}n_i = \bar{h}_i & \text{在 } \mathscr{L}_1 \text{ 面上}, n_j = n_j(x_k) \\ \bar{u}_i = \bar{g}_i & \text{在 } \mathscr{L}_2 \text{ 面上} \end{cases} \\ \begin{cases} \bar{s}_{ij} = 2G\bar{e}_{ij} \quad , G = G(\zeta) = \bar{B}/\bar{A} \\ \bar{\sigma}_m = 3K\bar{\varepsilon}_m \quad , \quad K = \text{const} \end{cases} \end{cases} \qquad (12.432)$$

在如上这组关系式中：$\bar{\sigma}_{ij}$、$\bar{\sigma}_m$、$\bar{S}_{ij}$、$\bar{\varepsilon}_{ij}$、$\bar{\varepsilon}_m$、$\bar{e}_{ij}$、$\bar{u}_i$ 均作为变量x_k和参数ζ的未知函数；而$\bar{b}_i$作为x_k和ζ的已知函数、G 为只由ζ决定的已知量。

式(12.432)为含参数ζ的典型的“弹性静力学问题”，其中$G = \bar{B}/\bar{A}$便是对应法则的标志。由这种含有ζ的弹性静力学解再通过拉普拉斯变换反演，便获得原粘弹准静力学问题的解。

如上研究了比较简单的准静态粘弹问题的对应法则。对于其他的动态粘弹问题同样可以通过拉普拉斯变换，将其化成“弹性静力学问题”，然而这种弹性静力学问题不一定有真正的而且简单的弹性静力学问题与之对应。不过，拉普拉斯变换从问题中消去了时间t，将t化成参数，从而使控制方程得到了一定的简化，特别是对于含有高阶时间微商的本构方程。

12.24 弹粘塑性本构关系

当物体变形进入塑性时，如果只考虑塑性应变的应变率而不计入弹性应变的应变率效应，这样的物体称作弹粘塑性体(elasto-visco-plastic body)。

12.24.1 一维弹粘塑本构关系

按经典做法，将总应变率$\dot{\epsilon}$分成弹性部分$\dot{\epsilon}^e$和塑性部分$\dot{\epsilon}^p$，即

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \qquad (12.433)$$

绍考洛夫斯基(Соколовский)在吕得维克(Ludwik)等人的工作基础上给出如下本构

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + g\left(\frac{|\sigma|}{Y_0} - 1\right) \qquad (12.434)$$

这相当于承认在弹性变形阶段成立的$\sigma = E\epsilon$规律在塑性变形阶段亦成立，即

$$\sigma = E\varepsilon^e \qquad (12.435)$$

同时认为，动态应力$(\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}))$与理想塑性应力$(\sigma = Y_0 = \text{const})$之差$\sigma - Y_0$是$\dot{\epsilon}^P$的函数，即

$$\sigma - Y_0 = f_1(\dot{\epsilon}^P) \quad \text{或} \quad |\sigma|/Y_0 - 1 = f_2(\dot{\epsilon}^P) \qquad (12.436)$$

作为上式的最简单的一种情况(只考虑拉伸，$|\sigma| = \sigma$)是：

$$\sigma - Y_0 = \eta\dot{\epsilon}^P \qquad (12.437)$$

该方程正是丙哈姆模型(Bingham model)的本构关系。丙哈姆模型,见图 12.44,它是由阻尼器和滑动板所组成的粘塑性元件。

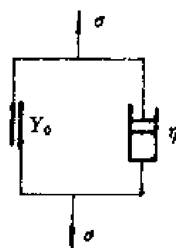


图 12.44 丙哈姆模型

从(12.435)式求得: $\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$,从(12.436) 式解出反函数: $\dot{\varepsilon}^P = g\left(\frac{|\sigma|}{Y_0} - 1\right)$。将它们代进(12.433)式中便得到式(12.434)。

绍考洛夫斯基方程是描述理想塑性的应变率效应的,于是马尔文(Malven)将它推广,在(12.434)式中以静态应力应变关系 $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ 代替 Y_0,从而有:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + g\left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1\right) \tag{12.438}$$

考虑到上式的第二部分,或者说(12.433)式的第二部分,只有在塑性变形时才出现,于是将它写成

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dfrac{\dot{\sigma}}{E} + \langle g(\dfrac{\sigma}{\sigma_0} - 1)\rangle \\ \langle g\rangle = \begin{cases} 0, & \text{对于 } |\sigma| - |\sigma_0(\varepsilon)| \leqslant 0 \\ g, & \text{对于 } |\sigma| - |\sigma_0(\varepsilon)| > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{12.439}$$

将上式改写成另一种常用形式:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = \dfrac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma^* \langle \varphi(F)\rangle \\ \langle \varphi(F)\rangle = \begin{cases} 0, & \text{对于 } F \leqslant 0 \\ \varphi(F), & \text{对于 } F > 0 \end{cases} \\ F = \sigma/\sigma_0(\varepsilon) - 1 \end{cases} \tag{12.440}$$

γ^* 为粘性系数(与(12.433) 式中的 η 相当)

这就是常用的“一维弹粘塑本构关系”,它又称作绍考洛夫斯基—马尔文模型。对于该模型,判断变形是由弹性区进入塑性区,还是由塑性区回到弹性区,完全由超应力(overstress) $(\sigma - \sigma_0)$ 决定。不管应力随时间增加$\frac{\partial|\sigma|}{\partial t} > 0$,还是减小$\frac{\partial|\sigma|}{\partial t} < 0$,只要$(|\sigma| - |\sigma_0|) \geqslant 0$ 就是粘塑性变形,否则为弹性变形。这与一般的一维应力情形不同,在一维应力中,只要$\frac{\partial|\sigma|}{\partial t} < 0$ 就是卸载进入弹性变形。

12.24.2 三维弹粘塑体的本构关系

根据塑性流动理论的(12.250)式

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^P = \mathrm{d}\lambda \cdot s_{ij}$$

可以推出

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \Lambda s_{ij} \tag{12.441}$$

其中

$$\Lambda = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \dot{\lambda}$$

由(12.441)式可以推出:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P \dot{\varepsilon}_{ij}^P = \Lambda^2 s_{ij} s_{ij}$$

则有

$$\Lambda = \sqrt{I^P} / \sqrt{\mathrm{I}_D} \tag{12.442}$$

其中

$$\begin{cases} \mathrm{II}_D = \dfrac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \\ I^P = \dfrac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^P \dot{\varepsilon}_{ij}^P \end{cases} \tag{12.443}$$

而据(12.249)式,则有

$$\dot{\varepsilon}_I^P = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^P \dot{\varepsilon}_{ij}^P}$$

从而

$$I^P = \frac{3}{4} (\dot{\varepsilon}_I^P)^2 \tag{12.444}$$

于是从(12.441)、(12.442)、(12.443)和(12.444)式得到:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \frac{\sqrt{I^P}}{\sqrt{\mathrm{I}_D}} s_{ij} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\varepsilon}_I^P \cdot \frac{s_{ij}}{\sqrt{\mathrm{I}_D}} \tag{12.445}$$

在一维情况的分析中,$\dot{\varepsilon}^P$ 是超应力$(\sigma - Y_0)$ 的函数,如见(12.436) 式。现在把这种概念推广到三维应力情况,认为 $\dot{\varepsilon}_I^P$ 是"超应力"$(\sqrt{\mathrm{I}_D} - \mathscr{K})$ 的函数(关于 $\mathscr{K}$, 见后面(12.455)式),于是可令

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\varepsilon}_I^P = \gamma^* \langle \varphi(\frac{\sqrt{\mathrm{I}_D}}{\mathscr{K}} - 1) \rangle \tag{12.446}$$

利用上式,(12.445)写成

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^P = \gamma^* \langle \varphi(\frac{\sqrt{\mathrm{I}_D}}{\mathscr{K}} - 1) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{\mathrm{I}_D}} \tag{12.447}$$

其中

$$\langle \varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \sqrt{\mathrm{I}_D} - \mathscr{K} \leqslant 0 \text{ 时} \\ \varphi, & \sqrt{\mathrm{I}_D} - \mathscr{K} > 0 \text{ 时} \end{cases}$$

如果设塑性应变部分 ε_{ij}^P 对体积变形无贡献(据(12.441)式,理所当然),即

$$\varepsilon_{kk}^P = \varepsilon_{11}^P + \varepsilon_{22}^P + \varepsilon_{33}^P = 0 \tag{12.448}$$

从而有

$$\dot{e}_{ij}^P - \dot{\varepsilon}_{ij}^P - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk}^P \delta_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^P \tag{12.449}$$

又因

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^P \tag{12.450}$$

再将在弹性变形成立的(12.175)的第二式推广到塑性段,即认为

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}^e \tag{12.451}$$

于是从(12.447)、(12.449)、(12.450)和(12.451)式得到

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^P = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \gamma^* \langle \varphi(\frac{\sqrt{\mathrm{I}_D}}{\mathscr{K}} - 1) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{\mathrm{I}_D}} \tag{12.452}$$

如果再令球量的本构关系和粘弹的情形一样,即按(12.346)的第二式,则有

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{1}{3K}\dot{\sigma}_m \tag{12.453}$$

将如上两式合起来，便是描述三维应力的弹粘塑性的本构方程

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{kk} = \dfrac{1}{3K}\dot{\sigma}_{kk} \\ \dot{e}_{ij} = \dfrac{1}{2G}\dot{s}_{ij} + \gamma^* \langle \varphi(\mathscr{F}) \rangle \dfrac{s_{ij}}{\sqrt{\mathrm{II}_D}} \end{cases} \tag{12.454}$$

式中

$$\begin{cases} \mathscr{F} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{II}_D}}{\mathscr{K}} - 1 \\ \mathscr{K} = \mathscr{K}(\varepsilon_{ij}^p) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} Y(\varepsilon_{ij}^p) \\ \langle \varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \mathscr{F} \leqslant 0 \text{ 时} \\ \varphi, & \mathscr{F} > 0 \text{ 时} \end{cases} \end{cases} \tag{12.455}$$

式(12.454)亦称作珀直纳方程(Perzyna equation)，它是珀直纳将绍考洛夫斯基—马尔文理论的推广。

12.25　一维弹塑性流动的数学表述与数值计算方案

在现代许多实际问题中，尤其是在军事上，都涉及到固体材料在冲击作用下的变形和破坏，如爆炸力学中的问题，高速碰撞问题，以及激光、X 射线和粒子来对材料的作用及其破坏问题。然而，要解决这种复杂的问题必须进行数值计算，自从 60 年代起在世界上已经建立起不少的数值计算模型，其中“HEMP 程序”便是这些成功的数值计算模型之一。在本节及下节将分别介绍这种模型的数学表述和数值计算方案。这两节的内容，也是流体力学和固体力学，特别是动载固体力学的重要的综合应用。

所谓一维弹塑性流动就是指介质的本构关系采取(12.309)式的形式，而运动除了依赖时间外只依赖一个空间变量。这种运动可能为平面对称、柱对称和球对称。

$$\begin{cases} \text{对于平面对称} \quad \text{自变量为 } x, t \quad \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \boldsymbol{v} = u\hat{\boldsymbol{i}} \\ \text{对于柱对称} \quad \text{自变量为 } r, t \quad \dfrac{\partial}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \boldsymbol{v} = u\hat{\boldsymbol{r}}_0 \\ \text{对于球对称} \quad \text{自变量为 } r, t \quad \dfrac{\partial}{\partial \theta} = \dfrac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \quad \boldsymbol{v} = u\hat{\boldsymbol{r}}_0 \end{cases}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{i}}$ 为 x 向单位矢量、$\hat{\boldsymbol{r}}_0$ 为径向单位矢量，θ 和 φ 为图 12.45 所示的角度，$\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$、$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_0$ 分别为两个角向单位矢量。

12.25.1　一维对称情况下的应力与应变

在这种对称的情况下，所取的坐标轴向就是应变的主方向，其自然应变率 $\dot{\mathbf{E}}$ 亦即变形速率张量 $\mathbf{B}$ 为

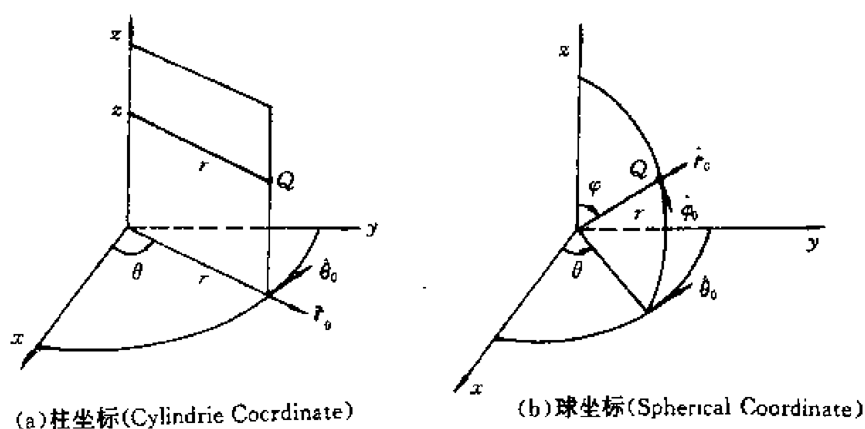


图 12.45

$$\dot{\mathbf{E}} = \{\dot{\varepsilon}_{ij}\} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \tag{12.456}$$

其中

$$\text{对于平面对称:}\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_x = \dfrac{\partial \dot{u}}{\partial x} \\ \dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_y = 0 \\ \dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_z = 0 \end{cases} \tag{12.457}$$

$$\text{对于柱对称:}\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_r = \dfrac{\partial \dot{u}}{\partial r} \\ \dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_\theta = \dfrac{\dot{u}}{r} \\ \dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_z = 0 \end{cases} \tag{12.458}$$

$$\text{对于球对称:}\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{11} = \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_r = \dfrac{\partial \dot{u}}{\partial r} \\ \dot{\varepsilon}_{22} = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_\theta = \dfrac{\dot{u}}{r} \\ \dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_\varphi = \dfrac{\dot{u}}{r} \end{cases} \tag{12.459}$$

当然,所有的切向应变率分量均为零。根据上式和(12.112)式,则在所述的坐标系下应变偏量的变化率 $\dot{\mathbf{D}}$ 为

$$\dot{\mathbf{D}} = \{\dot{e}_{ij}\} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{e}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{e}_3 \end{bmatrix} \tag{12.460}$$

其中

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\dot{\theta}_1\delta_{ij}$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \text{平面对称} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r} & \text{柱对称} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} + 2\dfrac{u}{r} & \text{球对称} \end{cases} \tag{12.461}$$

而在一维对称流动的情况下

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \text{平面对称} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r} & \text{柱对称} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} + 2\dfrac{u}{r} & \text{球对称} \end{cases} \tag{12.462}$$

又据连续性方程，有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \tag{12.463}$$

综上诸式，则有

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \tag{12.464}$$

由(12.456)～(12.464)式得到

$$\text{平面对称} \quad \begin{cases} \dot{e}_{11} = \dot{e}_1 = \dot{e}_x = \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dot{\varepsilon}_1 + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} = -\dfrac{2}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} \\ \dot{e}_{22} = \dot{e}_2 = \dot{e}_y = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dot{\varepsilon}_2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} \\ \dot{e}_{33} = \dot{e}_3 = \dot{e}_z = -\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dot{\varepsilon}_3 + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} \end{cases} \tag{12.465}$$

$$\text{柱对称} \quad \begin{cases} \dot{e}_{11} = \dot{e}_1 = \dot{e}_r = \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{1}{3}\dfrac{u}{r} = \dot{\varepsilon}_1 + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} = \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} \\ \dot{e}_{22} = \dot{e}_2 = \dot{e}_\theta = \dfrac{2}{3}\dfrac{u}{r} - \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dot{\varepsilon}_2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} = \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} \\ \dot{e}_{33} = \dot{e}_3 = \dot{e}_z = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r}\right) = \dot{\varepsilon}_3 + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} \end{cases} \tag{12.466}$$

$$\text{球对称} \quad \begin{cases} \dot{e}_{11} = \dot{e}_1 = \dot{e}_r = \dfrac{2}{3}\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{2}{3}\dfrac{u}{r} = \dot{\varepsilon}_1 + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} = \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} \\ \dot{e}_{22} = \dot{e}_2 = \dot{e}_\theta = \dfrac{1}{3}\dfrac{u}{r} - \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dot{\varepsilon}_2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} = \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} \\ \dot{e}_{33} = \dot{e}_3 = \dot{e}_\varphi = \dfrac{1}{3}\dfrac{u}{r} - \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dot{\varepsilon}_3 + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} = \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{\rho}}{\rho} \end{cases} \tag{12.467}$$

根据(12.309)的第三式以及如上诸式，则推出在所述的坐标系中，应力偏量的变化率张量$\dot{\mathbf{S}}$亦是对角线形式，即

$$\dot{\mathbf{S}}=\{\dot{S}_{ij}\}=\begin{bmatrix}\dot{S}_1 & 0 & 0\\ 0 & \dot{S}_2 & 0\\ 0 & 0 & \dot{S}_3\end{bmatrix} \tag{12.468}$$

其中

$$\dot{S}_{ij}=2\mu\dot{e}_{ij}$$

$$\begin{cases}\dot{S}_{11}=\dot{S}_1=2\mu(\dot{\varepsilon}_1-\frac{1}{3}\dot{\theta}_1)=2\mu(\dot{\varepsilon}_1+\frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{\rho})\\ \dot{S}_{22}=\dot{S}_2=2\mu(\dot{\varepsilon}_2-\frac{1}{3}\dot{\theta}_1)=2\mu(\dot{\varepsilon}_2+\frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{\rho})\\ \dot{S}_{33}=\dot{S}_3=2\mu(\dot{\varepsilon}_3-\frac{1}{3}\dot{\theta}_1)=2\mu(\dot{\varepsilon}_3+\frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{\rho})\\ \dot{S}_{12}=\dot{S}_{21}=\dot{S}_{13}=\dot{S}_{31}=\dot{S}_{23}=\dot{S}_{32}=0\end{cases} \tag{12.469}$$

为了使连续地差分计算能越过冲击波，即能在激波出现的地方亦可作为"连续流动区"进行差分计算，则人为地在(12.309)第一式所示的应力张量 Σ 中引入**人工粘性**(man-made viscosity)q，这时应力张量在所述的坐标系中取成

$$\Sigma=\{\sigma_{ij}\}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix} \tag{12.470}$$

其中

$$\sigma_{ij}=-(p+q)\delta_{ij}+S_{ij}$$

$$\begin{cases}\sigma_{11}=\sigma_1=\sigma_r=(\text{或}=\sigma_x)=-(p+q)+S_1\\ \sigma_{22}=\sigma_2=\sigma_\theta=(\text{或}=\sigma_y)=-(p+q)+S_2\\ \sigma_{33}=\sigma_3=\sigma_\varphi=(\text{或}=\sigma_z)=-(p+q)+S_3\\ \sigma_{12}=\sigma_{21}=\sigma_{13}=\sigma_{31}=\sigma_{23}=\sigma_{32}=0\end{cases} \tag{12.471}$$

由以上诸式可知在球对称的情况下有

$$\dot{\varepsilon}_2=\dot{\varepsilon}_3\quad \dot{e}_2=\dot{e}_3\quad \dot{S}_2=\dot{S}_3\quad \sigma_2=\sigma_3 \tag{12.472}$$

12.25.2 控制方程组

由(4.24)、(4.56)或(4.58)式得知，在不考虑热传导和热辐射以及体力的情况下，描述连续介质的普遍形式的方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0\\ \rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{div}\Sigma\end{cases}$$

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\mathrm{div}(\Sigma\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{div}\Sigma=\Sigma:\mathbf{B} \tag{12.473}$$

在一维对称情况下如上方程写成(参见(6.40)和(6.41)式)

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r^{\alpha-1}}\dfrac{\partial(r^{\alpha-1}u)}{\partial r}=-\dfrac{\dot{\rho}}{\rho}\\
\rho\dot{u}=\dfrac{\partial\sigma_1}{\partial r}+(\alpha-1)\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{r}\\
\rho\dot{e}=(p+q)\dfrac{\dot{\rho}}{\rho}+[S_1\dot{\varepsilon}_1+(\alpha-1)S_2\dot{\varepsilon}_2]
\end{cases}
\tag{12.474}
$$

其中

$$
\alpha=\begin{cases}1\text{ 时},r=x,\text{平面对称}\\ 2\text{ 时},\text{柱对称}\\ 3\text{ 时},\text{球对称}\end{cases}
$$

12.25.3 **基本关系式**

问题要求解，除了上述的应力应变关系与基本方程外，还需要以下关系式：

1. 流体静压力

流体静压力的取法很多，如在 § 12.18 中所述，但在 M. L. Wilkins 的程序（见 Wilkins M L，Calculation of elastic-plastic flow，LCRL-7322 Rev I）中取成

$$
p=A(\eta)+B(\eta)e\quad,\quad p\geqslant\frac{1}{3}Y_0 \tag{12.475}
$$

其中

$$
\begin{cases}
A(\eta)=b_1(\eta-1)+b_2(\eta-1)^2+b_3(\eta-1)^3\\
B(\eta)=b_4\eta\\
\eta=\rho/\rho^0
\end{cases}
\tag{12.476}
$$

ρ^0 为初始密度，Y_0 为材料简单拉伸时动载初始屈服强度，Y_0、b_1、b_2、b_3、b_4 均为常数。当然，为了精确计算，在计及硬化作用时 Y_0 亦可取成随 p 等变化的函数。

2. 人工粘性项 q

人工粘性项通常有两种取法：一次型和二次型

一次型
$$
q=\begin{cases}C_L a_c\rho\left|\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|\Delta r & ,\text{当}\dfrac{\partial u}{\partial r}<0\text{ 和 }\dot{\rho}>0\text{ 时}\\ 0 & \text{在其他情况下}\end{cases}
\tag{12.477}
$$

二次型
$$
q=\begin{cases}C_0^2\rho\left|\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|^2\Delta r^2 & ,\text{当}\dfrac{\partial u}{\partial r}<0\text{ 和 }\dot{\rho}>0\text{ 时}\\ 0 & \text{在其他情况下}\end{cases}
\tag{12.478}
$$

其中 $C_L\approx\dfrac{1}{2}$，a_c 为局部音速，$C_0\approx2$。

3. 屈服条件

屈服条件一般使用密赛斯准则，据(12.200)式和(12.208)式有

$$
S_1^2+S_2^2+S_3^2-\frac{2}{3}(Y_0)^2=\mathscr{P} \tag{12.479}
$$

①当 $\mathscr{P}\leqslant0$，则按(12.469)式所求得的 S_1、S_2、S_3 就是真正的应力偏量。

②当 $\mathscr{P}>0$，则由(12.469)式所求得的 S_1、S_2、S_3 必须修正，将所求得的诸 S_i 统统乘以 A，即

$$
\begin{cases}
S'_1 = S_1 \Lambda \quad , \quad S'_2 = S_2 \Lambda \quad , \quad S'_3 = S_3 \Lambda \\
\Lambda = \sqrt{\dfrac{2}{3}} Y_0 / \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}
\end{cases}
\tag{12.480}
$$

所得到的 S'_1、S'_2、S'_3 则为实际的应力偏量。

12.25.4 方程的变换

为了计算方便，特别是为了准确地描述分界面，将原按空间坐标描述的方程组改换成物质坐标描述的方程组。

1. 引进物质坐标

物质坐标，一般使用质点的初始空间位置的坐标，正如本书在前面所做的。然而在一维问题中，为了方便往往使用质量坐标 m 作为物质坐标。这时质点轨迹的空间坐标 r 和质点速度 u 则作为 m 和 t 的函数，即

$$
\begin{cases}
r = r(m,t) \quad , \quad m = m(r,t) \\
u = \dot{r}(m,t) = \left.\dfrac{\partial r}{\partial t}\right|_m
\end{cases}
\tag{12.481}
$$

其中，m 定义作

$$
m = \int_{r_0}^{r} \rho r^{\alpha-1} \mathrm{d}r \tag{12.482}
$$

式中　　$r_0 = r(0,t)$—— 为质量 $m = 0$ 的那个质点的轨迹

从(12.482)式得到

$$
\frac{\partial m}{\partial r} = \rho r^{\alpha-1} \tag{12.483}
$$

2. 将控制方程组化成物质坐标描述

更换方程中的自变量，由空间自变量 r、t 变成物质自变量 m、t，利用如下关系式：

$$
\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial r} = \rho r^{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial m}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}
$$

可将方程组(12.474)式改成物质坐标描述：

$$
-\frac{\partial \rho}{\partial t}/\rho = \rho \frac{\partial (r^{\alpha-1}u)}{\partial m}
$$

即

$$
\frac{\partial V}{\partial t} = \rho^0 \frac{\partial (r^{\alpha-1}u)}{\partial m} \tag{12.484}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = r^{\alpha-1}\frac{\partial \sigma_1}{\partial m} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho r}(\alpha - 1) \tag{12.485}
$$

$$
\rho^0 \frac{\partial e}{\partial t} = V[S_1\dot{\varepsilon}_1 + (\alpha-1)S_2\dot{\varepsilon}_2] - (p+q)\frac{\partial V}{\partial t} \tag{12.486}
$$

在如上诸式中

$$
V = \frac{\rho^0}{\rho} \quad , \quad \rho = \rho(m,t) \quad , \quad \rho^0 = \rho(m,0) \tag{12.487}
$$

12.25.5 差分计算方案

1. 划分物质空间(即质量分割)

为了差分计算,将物质空间分成若干个点,设 j 为任一个分点的标号、两个分点之间的质量为 Δm。对于第 j 点与第 $j+1$ 点之间的质量为 $\Delta m_{j+\frac{1}{2}}$,由(12.482)式并考虑到质量守恒,得到如下近似式:

$$\Delta m_{j+\frac{1}{2}}=\int_{r_j^n}^{r_{j+1}^n}\rho r^{\alpha-1}\mathrm{d}r=\int_{r_j^0}^{r_{j+1}^0}\rho r^{\alpha-1}\mathrm{d}r$$

$$\approx \rho_{j+\frac{1}{2}}^n(r_{j+\frac{1}{2}}^n)^{\alpha-1}(r_{j+1}^n-r_j^n)\approx \rho_{j+\frac{1}{2}}^0(r_{j+\frac{1}{2}}^0)^{\alpha-1}(r_{j+1}^0-r_j^0)$$

或者近似成

$$\Delta m_{j+\frac{1}{2}}=\int_{r_j^n}^{r_{j+1}^n}\rho r^{\alpha-1}\mathrm{d}r=\int_{r_j^0}^{r_{j+1}^0}\rho r^{\alpha-1}\mathrm{d}r$$

$$\approx \frac{1}{\alpha}\rho_{j+\frac{1}{2}}^n[(r_{j+1}^n)^\alpha-(r_j^n)^\alpha]\approx \frac{1}{\alpha}\rho_{j+\frac{1}{2}}^0[(r_{j+\frac{1}{2}}^0)^\alpha-(r_j^0)^\alpha]$$

请注意,在本节和下节中,由于将微分化成差分,所以在表示物理量的字母的右上角出现了表示不同时刻的上标,是凡在字母的右上角标有"0"、或者标有含"n"的项(如为 n、$n+\frac{1}{2}$、$n-\frac{1}{2}$、……)则为上标,不然则为指数。

由如上两式和(12.487)式得出两种式近似式

$$\frac{\Delta m_{j+\frac{1}{2}}}{(r_{j+\frac{1}{2}}^n)^{\alpha-1}}=\frac{\rho_{j+\frac{1}{2}}^0}{V_{j+\frac{1}{2}}^n}(r_{j+1}^n-r_j^n) \tag{12.488.1}$$

和

$$\left(\frac{\rho^0}{\Delta m}\right)_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\alpha V_{j+\frac{1}{2}}^n}{[(r_{j+1}^n)^\alpha-(r_j^n)^\alpha]} \tag{12.488.2}$$

其中

$$r_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(r_{j+1}-r_j)\quad,\quad t^0=0$$

$$\rho_{j+\frac{1}{2}}^n=\rho(m_{j+\frac{1}{2}},t^n)\quad,\quad \rho_{j+\frac{1}{2}}^0=\rho(m_{j+\frac{1}{2}},t^0)$$

$$\rho_j^n=\rho(m_j,t^n)\quad,\quad \rho_j^0=\rho(m_j,t^0)$$

$$r_{j+\frac{1}{2}}^n=r(m_{j+\frac{1}{2}},t^n)\quad,\quad r_{j+\frac{1}{2}}^0=r(m_{j+\frac{1}{2}},t^0)$$

$$r_j^n=r(m_j,t^n)\quad,\quad r_j^0=r(m_j,t^0)$$

在如上诸式中,上标"n"表示从 $t=t^0=0$ 算起的第 n 个时刻,即 $t=t^n$.

2. 将微分方程化成差分方程

将微分方程中的偏导数对时间和物质坐标作中心差分。

①将运动方程(12.485)式在点 (j,n) 作中心差分,给出

$$u_j^{n+\frac{1}{2}}=u_j^{n+\frac{1}{2}}+\frac{\Delta t^n}{\phi_j^n}[(\sigma_1)_{j+\frac{1}{2}}^n-(\sigma_1)_{j-\frac{1}{2}}^n]+(\alpha-1)\psi_j^n\cdot\Delta t^n \tag{12.489}$$

其中

$$
\begin{cases}
\Delta t^{n} = \frac{1}{2}(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}}) \\
\Delta t^{n-\frac{1}{2}} = t^{n} - t^{n-1} \\
\Delta t^{n+\frac{1}{2}} = t^{n+1} - t^{n}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\phi_j^n = \frac{\Delta m_j}{(r_j^n)^{\alpha-1}} = \frac{1}{2}\left[\rho_{j+\frac{1}{2}}^0 \frac{r_{j+1}^n - r_j^n}{V_{j+\frac{1}{2}}^n} + \rho_{j-\frac{1}{2}}^0 \frac{r_j^n - r_{j-1}^n}{V_{j-\frac{1}{2}}^n}\right] \\
\psi_j^n = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{(\sigma_1)_{j+\frac{1}{2}}^n - (\sigma_2)_{j+\frac{1}{2}}^n}{\frac{1}{2}(r_{j+1}^n + r_j^n)}\right]\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{j+\frac{1}{2}} + \left[\frac{(\sigma_1)_{j-\frac{1}{2}}^n - (\sigma_2)_{j-\frac{1}{2}}^n}{\frac{1}{2}(r_j^n + r_{j-1}^n)}\right]\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{j-\frac{1}{2}}\right\}
\end{cases}
\tag{12.490}
$$

$$
\begin{cases}
(\sigma_1)_{j+\frac{1}{2}}^n = \{-(p^n + q^{n-\frac{1}{2}}) + S_1\}_{j+\frac{1}{2}} \\
(\sigma_2)_{j+\frac{1}{2}}^n = \{-(p^n + q^{n-\frac{1}{2}}) + S_2\}_{j+\frac{1}{2}}
\end{cases}
$$

在上式中 q 本应取成 q^n，但为了列出显式差分，故取作 $q^{n-\frac{1}{2}}$，这样精度也降低一级。

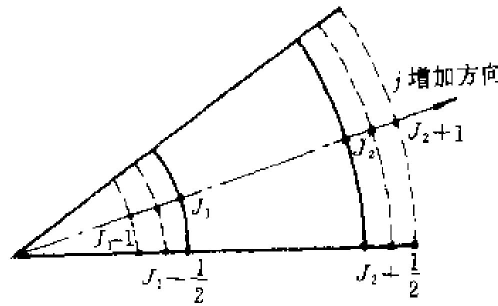


图 12.46

如上对速度的计算，所考虑的是内点。如果所考虑的 j 点处在边界上，则在形式上仍同内点做法，但实有差别，具体地：

a. 设点 j 处在内自由边界上，即

$$
j = J_1
$$

J_1 为内自由面上的质量分点标号，如图 12.46 所示。设在 J_1 点之内存在着点(J_1-1) 和 $(J_1-\frac{1}{2})$ 等虚网格点，在这样的点上令

$$
\begin{cases}
\rho_{J_1-\frac{1}{2}}^n = \rho_{J_1-\frac{1}{2}}^0 / V_{J_1-\frac{1}{2}}^n = 0, \qquad (\sigma_1)_{J_1-\frac{1}{2}}^n = (\sigma_2)_{J_1-\frac{1}{2}}^n = 0 \\
\left[(\sigma_1)_{J_1-\frac{1}{2}}^n - (\sigma_2)_{J_1-\frac{1}{2}}^n\right]\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{J_1-\frac{1}{2}} = \left[(\sigma_1)_{J_1+\frac{1}{2}}^n - (\sigma_2)_{J_1+\frac{1}{2}}^n\right]\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{J_1+\frac{1}{2}}
\end{cases}
\tag{12.491}
$$

（当然对其左边为$\frac{0}{0}$型的如上最后一式，亦有其他取法，这里从略）

现在点 (n, J_1) 上对运动方程作中心差分，根据上式，则给出

$$
u_{J_1}^{n+\frac{1}{2}} = u_{J_1}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^n}{\phi_{J_1}^n}\left[(\sigma_1)_{J_1+\frac{1}{2}}^n\right] + (\alpha-1)\psi_{J_1}^n \cdot \Delta t^n
\tag{12.492}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\phi_{J_1}^n = \dfrac{1}{2}\rho_{J_1+\frac{1}{2}}^0\left[\dfrac{r_{J_1+1}^n - r_{J_1}^n}{V_{J_1+\frac{1}{2}}^n}\right] \\
\psi_{J_1}^n = \left[\dfrac{(\sigma_1)_{J_1+\frac{1}{2}}^n - (\sigma_2)_{J_1+\frac{1}{2}}^n}{\frac{1}{2}(r_{J_1+1}^n + r_{J_1}^n)}\right]\left(\dfrac{V^n}{\rho^0}\right)_{J_1+\frac{1}{2}}
\end{cases}
\tag{12.493}
$$

b. 设点 j 在外自由边界上，即

$$
j = J_2
$$

J_2 为外自由面上的质量分点标号，如图12.46所示。设在 J_2 点之外存在着 (J_2+1)、$(J_2+\frac{1}{2})$ 等虚网格点，在虚网点上。令

$$
\begin{cases}
\rho_{J_2+\frac{1}{2}}^n = \rho_{J_2+\frac{1}{2}}^0 / V_{J_2+\frac{1}{2}}^n = 0 \quad , \quad (\sigma_1)_{J_2+\frac{1}{2}}^n = (\sigma_2)_{J_2+\frac{1}{2}}^n = 0 \\
\left[(\sigma_1)_{J_2+\frac{1}{2}}^n - (\sigma_2)_{J_2+\frac{1}{2}}^n\right]\left(\dfrac{V^n}{\rho^0}\right)_{J_2+\frac{1}{2}} \equiv \left[(\sigma_1)_{J_2-\frac{1}{2}}^n - (\sigma_2)_{J_2-\frac{1}{2}}^n\right]\left(\dfrac{V^n}{\rho^0}\right)_{J_2-\frac{1}{2}}
\end{cases}
\tag{12.494}
$$

（同内自由边界一样，这最后一式亦有其他取法，这里从略）

在点 (n,J_2) 上对运动方程作中心差分，根据上式，则给出

$$
u_{J_2}^{n+\frac{1}{2}} = u_{J_2}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^n}{\phi_{J_2}^n}\left[(\sigma_1)_{J_2-\frac{1}{2}}^n\right] + (\alpha-1)\psi_{J_2}^n \cdot \Delta t^n \tag{12.495}
$$

$$
\begin{cases}
\phi_{J_2}^n = \dfrac{1}{2}\rho_{J_2-\frac{1}{2}}^0\left[\dfrac{r_{J_2}^n - r_{J_2-1}^n}{V_{J_2-\frac{1}{2}}^n}\right] \\
\psi_{J_2}^n = \left[\dfrac{(\sigma_1)_{J_2-\frac{1}{2}}^n - (\sigma_2)_{J_2-\frac{1}{2}}^n}{\frac{1}{2}(r_{J_2}^n + r_{J_2-1}^n)}\right]\left(\dfrac{V^n}{\rho^0}\right)_{J_2-\frac{1}{2}}
\end{cases}
\tag{12.496}
$$

c. 如果点 j 处在固壁，即 $j=J$，其 J 为固壁分点标号，这时

$$
u_J^{n+\frac{1}{2}} = 0 \tag{12.497}
$$

②对于质点的运动轨迹方程 (12.481) 式，在点 $(n+\frac{1}{2},j)$ 作中心差分，则有

$$
r_j^{n+1} = r_j^n + u_j^{n+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \tag{12.498}
$$

③对连续性方程(12.484)式在 $(n+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$ 点作中心差分，同时为了更好地近似球对称情况，在差分式中增加了一个修正项 Θ，即有

$$
\begin{aligned}
V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = & V_{j+\frac{1}{2}}^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\rho^0}{\Delta m}\right)_{j+\frac{1}{2}}\Big[u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}(r_{j+1}^{n+\frac{1}{2}})^{\alpha-1} - u_j^{n+\frac{1}{2}}(r_j^{n+\frac{1}{2}})^{\alpha-1} \\
& + \frac{1}{2}(\alpha-1)(\alpha-2)\Theta_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\Big]
\end{aligned}
\tag{12.499}
$$

其中 $(\frac{\rho^0}{\Delta m})_{j+\frac{1}{2}}$ 按(12.488.2) 式计算，而 $\Theta_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 取作

$$
\Theta_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(\Delta t^{n+\frac{1}{2}})^2}{12}\left[(u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}})^3 - (u_j^{n+\frac{1}{2}})^3\right] \tag{12.500}
$$

④应力偏量的计算。根据(12.469)、(12.458)和(12.487)式，应力偏量写成

$$\begin{cases} \frac{\partial S_1}{\partial t} = 2\mu(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{3}\frac{\partial V}{\partial t}/V) \\ \frac{\partial S_2}{\partial t} = 2\mu(\frac{u}{r} - \frac{1}{3}\frac{\partial V}{\partial t}/V) \end{cases} \tag{12.501}$$

将上式在$(n+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$点作中心差分，即有

$$(\frac{\partial S_1}{\partial t})_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}[(S_1)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (S_1)_{j+\frac{1}{2}}^{n}]$$

$$(\frac{\partial S_2}{\partial t})_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}[(S_2)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (S_2)_{j+\frac{1}{2}}^{n}]$$

$$(\dot{\epsilon}_1)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (\frac{\partial u}{\partial r})_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^{n+\frac{1}{2}}}{r_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - r_j^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$(\dot{\epsilon}_2)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = (\frac{u}{r})_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + u_j^{n+\frac{1}{2}}}{r_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} + r_j^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$(\frac{\partial V}{\partial t})_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}(V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{j+\frac{1}{2}}^{n})$$

$$V_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + V_{j+\frac{1}{2}}^{n})$$

将如上诸式或者由这些式子的计算结果代进(12.501)式中，得到

$$\begin{cases} (S_1)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = (S_1)_{j+\frac{1}{2}}^{n} + 2\mu\left[(\frac{\partial u}{\partial r})_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\frac{V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{V_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}\right] \\ (S_2)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = (S_2)_{j+\frac{1}{2}}^{n} + 2\mu\left[(\frac{u}{r})_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \Delta t^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\frac{V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{j+\frac{1}{2}}^{n}}{V_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}\right] \end{cases} \tag{12.502}$$

利用应力偏量第一不变量为零，即$S_1 + S_2 + S_3 = 0$，则由上式求得

$$(S_3)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = -[(S_1)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + (S_2)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}] \tag{12.503}$$

⑤对于(12.477)和(12.478)式所示的人工粘性q在$(n+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})$点作中心差分。

当：$u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} < u_j^{n+\frac{1}{2}}$和$V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} < V_{j+\frac{1}{2}}^{n}$时，取：

$$q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = C_L(a_c\rho^0\eta)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}|u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^{n+\frac{1}{2}}| \quad \text{（一次型）} \tag{12.504.1}$$

或

$$q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = C_0^2(\rho^0\eta)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^{n+\frac{1}{2}})^2 \quad \text{（二次型）} \tag{12.504.2}$$

当：$u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} < u_j^{n+\frac{1}{2}}$和$V_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} < V_{j+\frac{1}{2}}^{n}$的条件不满足时，取：

$$q_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \tag{12.505}$$

⑥对能量方程(12.486)式在$(n+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$点作中心差分，给出

$$\rho^0_{j+\frac{1}{2}}e^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = \rho^0_{j+\frac{1}{2}}e^n_{j-\frac{1}{2}} + \{V[S_1\dot{\varepsilon}_1 + (\alpha-1)S_2\dot{\varepsilon}_2]\}^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t^{n+\frac{1}{2}} + (p+q)^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}(V^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} - V^n_{j+\frac{1}{2}})$$

而 $P^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(p^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} + p^n_{j+\frac{1}{2}})$，又据(12.475)式：$p = A(\eta) + B(\eta)e$，于是有

$$p^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = A(\eta^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}) + B(\eta^{n+1}_{j+\frac{1}{2}})e^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}\quad,\quad \eta^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = (\frac{1}{V})^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}$$

于是根据以上式，整理后给出

$$e^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\rho^0_{j+\frac{1}{2}}e^n_{j+\frac{1}{2}} - [\frac{1}{2}(A^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} + p^n_{j+\frac{1}{2}}) + q^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}](V^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} - V^n_{j+\frac{1}{2}}) + \beta_1 + \beta_2}{\rho^0_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}B^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}(V^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} - V^n_{j+\frac{1}{2}})} \tag{12.506}$$

其中

$$\begin{cases} A^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = A(\eta^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}),\quad B^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = B(\eta^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}) \\ \beta_1 = V^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}(S_1)^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}(\dot{\varepsilon}_1)^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \\ \beta_2 = (\alpha-1)V^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}(S_2)^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}(\dot{\varepsilon}_2)^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{12.507}$$

⑦流体静压p在点$(n+1,j+\frac{1}{2})$处取值，即有

$$p^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = A^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} + B^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}e^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} \tag{12.508}$$

⑧屈服条件，由(12.502)、(12.503)、(12.479)和(12.486)式，可以求得在点$(n+1,j+\frac{1}{2})$处的$\mathscr{D}$和Λ，即

$$\mathscr{D}^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}Y_0^2 \tag{12.509}$$

$$\Lambda^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}Y_0/\sqrt{(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}} \tag{12.510}$$

如果$\mathscr{D}^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} \leqslant 0$，则由(12.502)和(12.503)式所求得的应力偏量即真正的应力偏量。如果$\mathscr{D}^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} > 0$，则将(12.502)和(12.503)式所求得应力偏量都乘以(12.510)式所示的$\Lambda^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}$，即

$$\begin{cases} (S_1')^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = \Lambda^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}(S_1)^{n+1}_{j+\frac{1}{2}},(S_2')^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = \Lambda^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}(S_2)^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} \\ (S_3')^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = -[(S_1')^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} + (S_2')^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}] \end{cases} \tag{12.511}$$

所求得的S_1'、S_2'、S_3'便是在点$(n+1,j+\frac{1}{2})$处的真正应力偏量。

按照如上所列的顺序，即从式(12.489)至(12.511)，在前一时刻、前一点的物理量已知的情况下，便可求得下一时刻、下一空间点上的诸物理量，

⑨ 稳定性

为了保证计算的稳定性，在空间步长已经确定的情况下，时间步长 Δt 不能任取，它要根据空间步长来确定。在前一时刻的时间步长 $\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$ 已知的情况下，下一时刻的时间步长 $\Delta t^{n+\frac{3}{2}}$ 取作

$$\Delta t^{n+\frac{3}{2}} = \min\left\{\frac{\Delta r'^{n+1}}{3\sqrt{a_c^2 + b_*^2}}\right\}_{j+\frac{1}{2}} \tag{12.512}$$

其中 a_c——局部音速

$$b_* = \begin{cases} 0 \quad ,\text{当}(\dot{V})_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \geqslant 0 \text{ 时} \\ 8c_0^2 \cdot \Delta r_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \cdot \left(\frac{\dot{V}}{V}\right)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad ,\text{当}(\dot{V})_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$(\text{其中} \quad \Delta r_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = r_{j+1}^{n+1} - r_j^{n+1})$$

如若按(12.512)式所求得的 $\Delta t^{n+\frac{3}{2}} > (1.1)\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$，则下一时刻时间步长 $\Delta t^{n+\frac{3}{2}}$ 取作

$$\Delta t^{n+\frac{3}{2}} = (1.1)\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \tag{12.513}$$

12.26 二维弹塑性流动的数学表述与数值计算方案

本节所叙的二弹塑性流动的数值计算模型正是 HEMP 模型，它有如下的特点：

(1) 采用拉格朗日观点处理微分方程的差分；

(2) 弹塑性流动；

(3) 自然应变；

(4) 显式差分格式；

(5) 材料可以为多层介质(包括炸药层在内)；

(6) 可以处理流体层和固体层之间的滑移；

(7) 处理的问题是二维的(平面对称或者轴对称)、不定常的。

实际上许多问题都可归结为二维的，所以它可成功有效地解决许多问题，但是该模型又在发展改进，已经出现了三维的 HEMP 模型，如 HEMP3D 以及许多新的大型完备程序。然而，不管模型的改进和最新发展如何，HEMP 模型仍是它们的最重要的基础之一。

12.26.1 基本方程和基本关系式

1. 符 号

x、r：分别表示质点轨迹的轴向和径向(或 y 向)的坐标分量。

$\hat{i}$、$\hat{r}_0$：分别为 x 轴和 r 轴向的单位矢量。

"·"：表示随体导数(即物质导数)。

上标"n"：表示时间间隔数，如"t^n"表示从开始到第 n 个时间间隔的时间。

F^n：表示函数 F 在 t^n 时刻的值。

S_{xx}、S_{rr}、$S_{\theta\theta}$、τ_{xr}：分别表示应力偏量张量的轴向、径向、角向分量、和 (x,r) 平面上的切向分量。

ε_{xx}、ε_{rr}、$\varepsilon_{\theta\theta}$、$\varepsilon_{xr}$：分别表示应变张量的轴向、径向、角向分量和$(x,r)$平面上的切向分量。

$V=\dfrac{\rho_0}{\rho}$：相对比容；ρ^0：参考密度；e：比内能；μ：剪切模量。

其他常用符号在此不一一列指。

2. 质点的运动轨迹 $\boldsymbol{R}$、速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$

在这种二维对称的情况下，$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 分别为

$$\begin{cases}\boldsymbol{R}=x\hat{\boldsymbol{i}}+r\hat{\boldsymbol{r}}_0\\ \boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{R}}=\dot{x}\hat{\boldsymbol{i}}+\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}}_0\\ \boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{R}}=\ddot{x}\hat{\boldsymbol{i}}+\ddot{r}\hat{\boldsymbol{r}}_0\end{cases}\tag{12.514.1}$$

3. 基本方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\dot{V}}{V}=\dfrac{\partial\dot{x}}{\partial x}+\dfrac{\partial\dot{r}}{\partial r}+\beta\dfrac{\dot{r}}{r}\\ \rho\ddot{x}=\dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xr}}{\partial r}+\beta\dfrac{\tau_{xr}}{r}\\ \rho\ddot{r}=\dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\dfrac{\partial\tau_{xr}}{\partial x}+\beta\dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}\\ \rho^0\dot{e}=-(p+q)\dot{V}+V(S_{xx}\dot{\varepsilon}_{xx}+S_{rr}\dot{\varepsilon}_{rr}+Z\tau_{xr}\dot{\varepsilon}_{xr}+\beta S_{\theta\theta}\dot{\varepsilon}_{\theta\theta})\end{cases}\tag{12.514.2}$$

$\begin{cases}\beta=0\text{：为二维平面对称情形}\\ \beta=1\text{：为二维轴对称情形}\end{cases}$ （参见(6.40)式）

4. 基本关系式：

$$\begin{cases}\sigma_{xx}=-(p+q)+S_{xx}\\ \sigma_{rr}=-(p+q)+S_{rr}\\ \sigma_{\theta\theta}=-(p+q)+S_{\theta\theta}\end{cases}\tag{12.515}$$

$$\begin{cases}\dot{\varepsilon}_{xx}=\dfrac{\partial\dot{x}}{\partial x}\quad,\quad\dot{\varepsilon}_{rr}=\dfrac{\partial\dot{r}}{\partial r}\\ \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}=\dfrac{\dot{r}}{r}\quad,\quad\dot{\varepsilon}_{xr}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\dot{x}}{\partial r}+\dfrac{\partial\dot{r}}{\partial x}\right)\end{cases}\tag{12.516}$$

$$\begin{cases}\dot{S}_{xx}=2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{xx}-\dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{V}}{V}\right)+\dot{\delta}_{xx}\\ \dot{S}_{rr}=2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{rr}-\dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{V}}{V}\right)+\dot{\delta}_{rr}\\ \dot{S}_{\theta\theta}=2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}-\dfrac{1}{3}\dfrac{\dot{V}}{V}\right)\\ \dot{\tau}_{xr}=2\mu\dot{\varepsilon}_{xr}+\dot{\delta}_{xr}\end{cases}\tag{12.517}$$

μ：剪切模量

在这里 $\dot{\delta}_{xx}$、$\dot{\delta}_{rr}$、$\dot{\delta}_{xr}$ 是由于考虑到质点(质团)旋转所导致的附加项。

$$\dot{\delta}_{xx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \delta_{xx}}{\Delta t}, \quad \dot{\delta}_{rr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \delta_{rr}}{\Delta t}, \quad \dot{\delta}_{xr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \delta_{xr}}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} \Delta \delta_{xx} = \dfrac{S_{xx} - S_{rr}}{2}[\cos(2\Delta\alpha) - 1] - \tau_{xr}\sin(2\Delta\alpha) \\ \Delta \delta_{rr} = \dfrac{S_{rr} - S_{xx}}{2}[\cos(2\Delta\alpha) - 1] + \tau_{xr}\sin(2\Delta\alpha) \\ \Delta \delta_{xr} = \tau_{xr}[\cos(2\Delta\alpha) - 1] + \dfrac{S_{xx} - S_{rr}}{2}\sin(2\Delta\alpha) \\ \Delta\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \dot{r}}{\partial x} - \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial r}\right) \cdot \Delta t \end{cases} \tag{12.518}$$

由上给出的具体关系，可以推出 $\dot{\delta}_{xx}$、$\dot{\delta}_{rr}$、$\dot{\delta}_{xr}$ 的表达式。但由于我们的目的是做数值计算，需要的正是 $\Delta\delta_{xx}$、$\Delta\delta_{rr}$、$\Delta\delta_{xr}$ 故不给出 $\dot{\delta}_{xx}$ 等的表达式。

$$p = b_1\left(\frac{\rho}{\rho^0} - 1\right) + b_2\left(\frac{\rho}{\rho^0} - 1\right)^2 + b_3\left(\frac{\rho}{\rho^0} - 1\right)^3 + b_4\frac{\rho}{\rho^0} \cdot e \tag{12.519}$$

$$q = \begin{cases} 0, & \dot{V} \geqslant \text{时} \\ \dfrac{C_L \rho^0 A}{V}\left(\dfrac{\dot{V}}{V}\right)^2, & \dot{V} < 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{12.520}$$

其中：b_1、b_2、b_3、b_4 为常量；C_L：人工粘性系数；A：差分计算的网格面积。

密赛斯屈服条件(见(12.211)式，为表述方便，将原式中的 I_D 改为 J)

$$2J = S_{xx}^2 + S_{rr}^2 + S_{\theta\theta}^2 + 2\tau_{xr}^2 \leqslant \frac{2}{3}Y_0^2 \tag{12.521}$$

Y_0：在材料没有强化时，它为常量；假若有强化，它作为应变能的函数，当材料发生熔化时它取作零。

如果如上不等式破坏，则将所求得的 S_{xx}、S_{rr}、$S_{\theta\theta}$、τ_{xr} 统统乘以 Λ，将其结果作为真正的应力偏量。其中

$$\Lambda = Y_0 \Big/ \sqrt{\frac{3}{2}(S_{xx}^2 + S_{rr}^2 + S_{\theta\theta}^2 + 2\tau_{xr}^2)}$$

12.26.2 差分计算方案

在二维差分计算中，需要事先将 (x,r) 平面纵横分割成若干个四边形小面元(x 向分割线编号为 j；r 向分割线编号为 k)，每个小面元则代表一个“质点”。这个“质点”在运动中形状在不断变化，原为四边形以后不一定保持，但作为近似计算我们仍假定它为四边形，只是形状改变罢了，即由四边形的四个顶点(结点)就决定了该“质点”在某个时刻的位置。因此，必须求解结点的运动，必须把结点亦作为一个“质点”，现以一个结点(如 jk 点)所邻接的四个面元的对角线所围成的面元来代表它。求结点运动的差分计算就在这样的面元上进行。网格划分如图 12.47 所示。

1. 随体导数 $\dot{F}$ 的差分计算

按中心差分

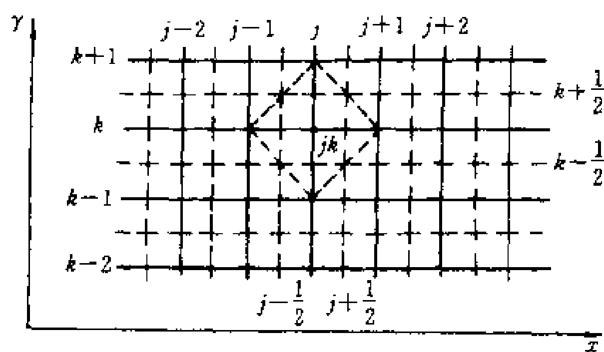


图 12.47

$$\dot{F}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{F^{n+1} - F^n}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}} \tag{12.522}$$

其中：
$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} = t^{n+1} - t^n$$

2. 空间偏导数的差分计算

将微分方程在四边形的面元上作差分，若按线性中心差分则太粗略，现在使用面差分，这样就需要引进积分形式的偏微分定义。

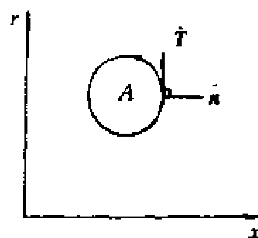


图 12.48

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\oint_C F\hat{n} \cdot \hat{i} \mathrm{d}s}{\lim\limits_{A\to 0} A} = \frac{\oint_C F\mathrm{d}r}{\lim\limits_{A\to 0} A}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\oint_C F\hat{n} \cdot \hat{r}_0 \mathrm{d}s}{\lim\limits_{A\to 0} A} = -\frac{\oint_C F\mathrm{d}x}{\lim\limits_{A\to 0} A}$$

其中

- A：为面元面积；
- C：为面元的边界线；
- ds：为 C 上的线段微元；$\hat{n}$：为 C 的单位外法线矢量；
- $\hat{\tau}$：为 C 的单位切向矢量，见图 12.48；
- $\hat{i}$：为 x 向单位矢量；$\hat{r}_0$：为 r 向单位矢量。

空间偏导数在面元上作差分：

①已知四边形四个角点上的 F 值及其坐标，求其中心 B 点上的偏导数(参见图 12.49)：

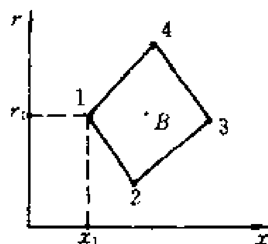


图 12.49

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_B \text{和} \left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_B$$

取：
$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_B \doteq \frac{\oint_C F\mathrm{d}r}{A}$$

$$\oint_C F\mathrm{d}r = \int_{\overline{12}} F\mathrm{d}r + \int_{\overline{23}} F\mathrm{d}r + \int_{\overline{34}} F\mathrm{d}r + \int_{\overline{41}} F\mathrm{d}r$$

$$= \overline{F}_{12}(r_2 - r_1) + \overline{F}_{23}(r_3 - r_2) + \overline{F}_{34}(r_4 - r_3) + \overline{F}_{41}(r_1 - r_4)$$

其中：
$$\begin{cases} \overline{F}_{12} = \dfrac{1}{2}(F_1 + F_2), \overline{F}_{23} = \dfrac{1}{2}(F_2 + F_3) \\ \overline{F}_{34} = \dfrac{1}{2}(F_3 + F_4), \overline{F}_{41} = \dfrac{1}{2}(F_4 + F_1) \end{cases}$$

故有

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_B = \frac{1}{2A}[(F_2 - F_4)(r_3 - r_1) + (F_3 - F_1)(r_4 - r_2)] \tag{12.523}$$

同理

$$\left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_B = -\frac{\oint_C F\mathrm{d}x}{A} = -\frac{1}{2A}[(F_2 - F_4)(x_3 - x_1) + (F_3 - F_1)(x_4 - x_2)] \tag{12.524}$$

（下标数字表示在各点的取值，如 F_1 表示 F 在“点 1”上取值）

② 已知：点 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 的坐标以及与点 $B(x_i, r_k)$ 相邻的四个四边形“中心”上的 F 值（$F_{①}$、$F_{②}$、$F_{③}$、$F_{④}$），求点 B 上的 $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_B$ 和 $\left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_B$，则有（参见图 12.50）

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_B = \dfrac{1}{2A}[F_{①}(r_{Ⅲ} - r_{Ⅱ}) + F_{②}(r_{Ⅳ} - r_{Ⅲ}) + F_{③}(r_{Ⅰ} - r_{Ⅳ}) + F_{④}(r_{Ⅱ} - r_{Ⅰ})] \\ \left.\dfrac{\partial F}{\partial r}\right|_B = -\dfrac{1}{2A}[F_{①}(x_{Ⅲ} - x_{Ⅱ}) + F_{②}(x_{Ⅳ} - x_{Ⅲ}) + F_{③}(x_{Ⅰ} - x_{Ⅳ}) + F_{④}(x_{Ⅱ} - x_{Ⅰ})] \end{cases} \tag{12.525}$$

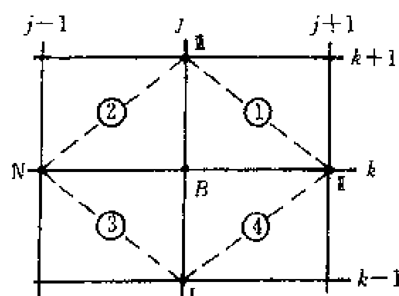


图 12.50

3. 四边形的面积计算

已知四边形 1 2 3 4 的四个顶点坐标，见图 12.51，求该四边形的面积，对于其中的三角形“Δ1 2 4”，它的有向面积及面积分别为：

$$\boldsymbol{A}_b = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_{12} \times \boldsymbol{r}_{14}$$

$$A_b = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(r_4 - r_1) - (x_4 - x_1)(r_2 - r_1)] \tag{12.526}$$

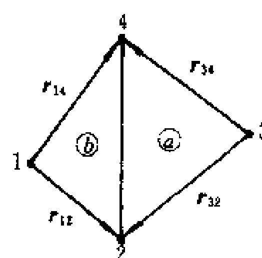


图 12.51

对于“Δ2 3 4”，它的有向面积及面积分别为：

$$\boldsymbol{A}_a = \frac{1}{2}\boldsymbol{r}_{34} \times \boldsymbol{r}_{32}$$

$$A_a = \frac{1}{2}[(x_4 - x_3)(r_2 - r_3) - (x_2 - x_3)(r_4 - r_3)] \tag{12.527}$$

四边形 1 2 3 4 的面积 A：

$$A = A_a + A_b = \frac{1}{2}[(x_2 - x_4)(r_3 - r_1) + (x_1 - x_3)(r_2 - r_4)] \tag{12.528}$$

4. 相对比容 V

我们的数值计算是在 (x,r) 平面上的那些分割面元上进行。对于平面对称，这种面元(实际上是单位厚度的“体元”)在运动中其质量是守恒的；对于轴对称情形，它实际上是以这个面元为截面、以 x 轴为对称轴的圆环(“体元”)，其质量是守恒的。

现在就根据这种守恒来求面元的相对比容 V，面微分形式的连续方程则用来计算 $\varepsilon_{\theta\theta}$，或作为计算检查之用。

① 平面对称

设面元的质量为 M，而 $\rho A = M = \text{const}$

$$V = \frac{\rho^0}{M}A = \frac{\rho^0}{M}(A_a + A_b) \tag{12.529}$$

②轴对称情形

设体元的体积为 V^*、质量为 M(在这里 V^* 和 M 与真正的体积和质量均差一个 2π 因子)。

$$V^* = A_a\bar{r}_a + A_b\bar{r}_b,\quad \bar{r}_a = \frac{1}{3}(r_2 + r_3 + r_4),\quad \bar{r}_b = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_4)$$

因

$$\rho V^* = M \quad , \quad V = \frac{\rho^0}{\rho}$$

故

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{\rho^0}{M}\right)(A_a\bar{r}_a + A_b\bar{r}_b) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\rho^0}{M}\right)[(r_2 + r_3 + r_4)A_a + (r_1 + r_2 + r_4)A_b] \end{aligned} \tag{12.530}$$

5. 关于 $\varepsilon_{\theta\theta}$ 的数值计算

据连续方程(对于轴对称)

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial\dot{r}}{\partial r} + \frac{\dot{r}}{r} = \frac{\dot{V}}{V}$$

面

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial\dot{x}}{\partial x}\right|_B = \dfrac{1}{2A}[(\dot{x}_2 - \dot{x}_4)(r_3 - r_1) + (\dot{x}_3 - \dot{x}_1)(r_4 - r_2)] \\ \left.\dfrac{\partial\dot{r}}{\partial r}\right|_B = -\dfrac{1}{2A}[(\dot{r}_2 - \dot{r}_4)(x_3 - x_1) + (\dot{r}_3 - \dot{r}_1)(x_4 - x_2)] \end{cases}$$

再据(12.530)式以及(12.527)式及下式

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \dot{r}/r$$

则推出：

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{A_a\dot{\bar{r}}_a + A_b\dot{\bar{r}}_b}{A_a\bar{r}_a + A_b\bar{r}_b} + \frac{(\bar{r}_b - \bar{r}_a)(A_a\dot{A}_b - \dot{A}_aA_b)}{(A_a + A_b)(A_a\bar{r}_a + A_b\bar{r}_b)} \tag{12.531}$$

但由于

$$\bar{r}_b - \bar{r}_a \doteq 0$$

所以

$$\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} \doteq \frac{A_a\dot{\bar{r}}_a + A_b\dot{\bar{r}}_b}{A_a\bar{r}_a + A_b\bar{r}_b} \tag{12.532}$$

12.26.3 差分计算的代数关系式

如下只考虑更有意义的二维弹塑性流动——轴对情况的差分计算。

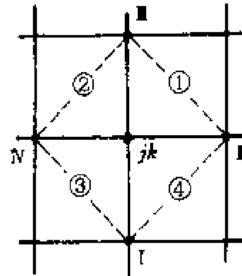


图 12.52

1. 结点(网点)速度

计算参见图 12.52，将(12.514.2)式的运动方程变成差分，则有

$$\begin{cases}
\dot{x}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{x}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} - \dfrac{\Delta t^n}{2\phi_{jk}^n}\big[(\sigma_{xx}^n)_{①}(r_{Ⅱ}^n - r_{Ⅲ}^n) + (\sigma_{xx}^n)_{②}(r_{Ⅲ}^n - r_{Ⅳ}^n) \\
\qquad + (\sigma_{xx}^n)_{③}(r_{Ⅳ}^n - r_{Ⅰ}^n) + (\sigma_{xx}^n)_{④}(r_{Ⅰ}^n - r_{Ⅱ}^n) \\
\qquad - (\tau_{xr}^n)_{①}(x_{Ⅱ}^n - x_{Ⅲ}^n) - (\tau_{xr}^n)_{②}(x_{Ⅲ}^n - x_{Ⅳ}^n) \\
\qquad - (\tau_{xr}^n)_{③}(x_{Ⅳ}^n - x_{Ⅰ}^n) - (\tau_{xr}^n)_{④}(x_{Ⅰ}^n - x_{Ⅱ}^n)\big] + \Delta t^n \cdot \alpha_{jk}^n \\
\dot{r}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{r}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t^n}{2\phi_{jk}^n}\big[(\sigma_{rr}^n)_{①}(x_{Ⅱ}^n - x_{Ⅲ}^n) \\
\qquad + (\sigma_{rr}^n)_{②}(x_{Ⅲ}^n - x_{Ⅳ}^n) \\
\qquad + (\sigma_{rr}^n)_{③}(x_{Ⅳ}^n - x_{Ⅰ}^n) \\
\qquad + (\sigma_{rr}^n)_{④}(x_{Ⅰ}^n - x_{Ⅱ}^n) \\
\qquad - (\tau_{xr}^n)_{①}(r_{Ⅱ}^n - r_{Ⅲ}^n) \\
\qquad - (\tau_{xr}^n)_{②}(x_{Ⅲ}^n - x_{Ⅳ}^n) \\
\qquad - (\tau_{xr}^n)_{③}(x_{Ⅳ}^n - x_{Ⅰ}^n) \\
\qquad - (\tau_{xr}^n)_{④}(x_{Ⅰ}^n - x_{Ⅱ}^n)\big] + \Delta t^n \cdot \beta_{jk}^n
\end{cases} \tag{12.533}$$

$$\begin{cases}
\Delta t^n = \dfrac{1}{2}(\Delta t^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^{n-\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}(t^{n+1} - t^{n-1}) \\
\alpha_{jk}^n = \dfrac{1}{4}\left\{\left[\tau_{xr}^n\left(\dfrac{A^n}{M}\right)\right]_{①} + \left[\tau_{xr}^n\left(\dfrac{A^n}{M}\right)\right]_{②} + \left[\tau_{xr}^n\left(\dfrac{A^n}{M}\right)\right]_{③} \right. \\
\qquad \left. + \left[\tau_{xr}^n\left(\dfrac{A^n}{M}\right)\right]_{④}\right\}
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\beta_{jk}^{n}=\frac{1}{4}\left\{\left[(\sigma_{rr}^{n}-\sigma_{\theta\theta}^{n})\left(\frac{A^{n}}{M}\right)\right]_{①}+\left[(\sigma_{rr}^{n}-\sigma_{\theta\theta}^{n})\left(\frac{A^{n}}{M}\right)\right]_{②}\right.\\
\qquad\left.+\left[(\sigma_{rr}^{n}-\sigma_{\theta\theta}^{n})\left(\frac{A^{n}}{M}\right)\right]_{③}+\left[(\sigma_{rr}^{n}-\sigma_{\theta\theta}^{n})\left(\frac{A^{n}}{M}\right)\right]_{④}\right\}\\
\phi_{jk}^{n}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\rho^{0}}{V^{n}}A^{n}\right)_{①}+\left(\frac{\rho^{0}}{V^{n}}A^{n}\right)_{②}+\left(\frac{\rho^{0}}{V^{n}}A^{n}\right)_{③}+\left(\frac{\rho^{0}}{V^{n}}A^{n}\right)_{④}\right]
\end{cases}
\tag{12.534.1}
$$

在这里使用了质量守恒：

$$
(\rho A r)_{ⓘ}=M_{ⓘ} \tag{12.534.2}
$$

2. 结点坐标

结点作为质点，它不同时刻处于不同的空间位置，即具有不同的空间坐标。将(12.514.1)的第二式差分，则可计算结点 (jk) 在 t^{n+1} 时刻的坐标

$$
\begin{cases}
x_{jk}^{n+1}=x_{jk}^{n}+\dot{x}_{jk}^{n+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t^{n+\frac{1}{2}}\\
r_{jk}^{n+1}=r_{jk}^{n}+\dot{r}_{jk}^{n+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t^{n+\frac{1}{2}}
\end{cases}
\tag{12.535}
$$

3. 网格面积(对于任一个网格，如图 12.53 所示的第 i 个网格)

$$
\begin{cases}
A_{a}^{n+1}=\frac{1}{2}\left[(x_{4}^{n+1}-x_{3}^{n+1})(r_{2}^{n+1}-r_{3}^{n+1})\right.\\
\qquad\left.-(x_{2}^{n+1}-x_{3}^{n+1})(r_{4}^{n+1}-r_{3}^{n+1})\right]_{ⓘ}\\
A_{b}^{n+1}=\frac{1}{2}\left[(x_{2}^{n+1}-x_{1}^{n+1})(r_{4}^{n+1}-r_{1}^{n+1})\right.\\
\qquad\left.-(x_{4}^{n+1}-x_{1}^{n+1})(r_{2}^{n+1}-r_{1}^{n+1})\right]_{ⓘ}
\end{cases}
\tag{12.536}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{ⓘ}^{n+1}&=A_{a}^{n+1}+A_{b}^{n}\\
&=\frac{1}{2}\left[(x_{2}^{n+1}-x_{4}^{n+1})(r_{3}^{n+1}-r_{1}^{n+1})\right.\\
&\qquad\left.+(x_{1}^{n+1}-x_{3}^{n+1})(r_{2}^{n+1}-r_{4}^{n+1})\right]_{ⓘ}
\end{aligned}
\tag{12.537}
$$

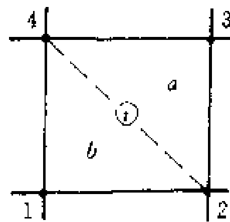


图 12.53

4. 相对比容

$$
\begin{aligned}
V_{ⓘ}^{n+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{\rho^{0}}{M}\right)_{ⓘ}&\left[(r_{2}^{n+1}+r_{3}^{n+1}+r_{4}^{n+1})A_{a}^{n+1}\right.\\
&\left.+(r_{1}^{n+1}+r_{2}^{n+1}+r_{4}^{n+1})A_{b}^{n+1})\right]_{ⓘ}
\end{aligned}
\tag{12.538}
$$

5. 人工粘性(这里只写出二次粘性)

$$
q_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}=\begin{cases}0 & \text{当}\ \dot{V}\geqslant 0\ \text{时}\\ \left[\dfrac{C_L^2\rho^0 A^{n+\frac{1}{2}}}{V^{n+\frac{1}{2}}}\right]_{\odot}\left[\left(\dfrac{\dot{V}}{V}\right)\right]_{\odot}^{n+\frac{1}{2}} & \text{当}\ \dot{V}<0\ \text{时}\end{cases}\tag{12.539}
$$

其中：

$$
\left(\frac{\dot{V}}{V}\right)_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{2(V_{\odot}^{n+1}-V_{\odot}^{n})}{(V_{\odot}^{n+1}+V_{\odot}^{n})\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}
$$

6. 应力偏量

将(12.516)式的左边按时间差分、右边按空间面差分，则给出

$$
\begin{cases}(\Delta\varepsilon_{xx})_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}=\dfrac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2A_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}}[(\dot{x}_2-\dot{x}_4)(r_3-r_1)-(\dot{x}_3-\dot{x}_1)(r_2-r_4)]_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}\\ (\Delta\varepsilon_{rr})_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}=-\dfrac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2A_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}}[(\dot{r}_2-\dot{r}_4)(x_3-x_1)-(\dot{r}_3-\dot{r}_1)(x_2-x_4)]_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}\\ (\Delta\varepsilon_{\theta\theta})_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{A_a\dot{\bar{r}}_a+A_b\dot{\bar{r}}_b}{A_a\bar{r}_a+A_b\bar{r}_b}\right)_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t^{n+\frac{1}{2}}\\ (\Delta\varepsilon_{xr})_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}=\dfrac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{4A_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}}\{[(\dot{r}_2-\dot{r}_4)(r_3-r_1)-(\dot{r}_3-\dot{r}_1)(r_2-r_4)]\\ \qquad -[(\dot{x}_2-\dot{x}_4)(x_3-x_1)-(\dot{x}_3-\dot{x}_1)(x_2-x_4)]\}_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}\end{cases}\tag{12.540}
$$

$$
\left(\frac{\Delta V}{V}\right)_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{2(V_{\odot}^{n+1}-V_{\odot}^{n})}{V_{\odot}^{n+1}+V_{\odot}^{n}}\tag{12.541}
$$

$$
\begin{aligned}2(\Delta\alpha)_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}{2A_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}}\{&[(\dot{r}_2-\dot{r}_4)(r_3-r_1)-(\dot{r}_3-\dot{r}_1)(r_2-r_4)]\\ &+[(\dot{x}_2-\dot{x}_4)(x_3-x_1)-(\dot{x}_3-\dot{x}_1)(x_2-x_4)]\}_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{12.542}
$$

$$
\begin{cases}(\Delta\delta_{xx})_{\odot}^{n}=\left\{\dfrac{S_{xx}^{n}-S_{rr}^{n}}{2}[\cos(2\Delta\alpha^{n+\frac{1}{2}})-1]-\tau_{xr}^{n}\sin(2\Delta\alpha^{n+\frac{1}{2}})\right\}_{\odot}\\ (\Delta\delta_{rr})_{\odot}^{n}=-(\Delta\delta_{xx})_{\odot}^{n}\\ (\Delta\delta_{xr})_{\odot}^{n}=\left\{\tau_{xr}^{n}[\cos(2\Delta\alpha^{n+\frac{1}{2}})-1]+\dfrac{S_{xx}^{n}-S_{rr}^{n}}{2}\sin(2\Delta\alpha^{n+\frac{1}{2}})\right\}_{\odot}\end{cases}\tag{12.543}
$$

$$
\begin{cases}(S_{xx})_{\odot}^{n+1}=(S_{xx})_{\odot}^{n}+2\mu\left[(\Delta\varepsilon_{xx})^{n+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\Delta V}{V}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right]_{\odot}+(\Delta\delta_{xx})_{\odot}^{n}\\ (S_{rr})_{\odot}^{n+1}=(S_{rr})_{\odot}^{n}+2\mu\left[(\Delta\varepsilon_{rr})^{n+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\Delta V}{V}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right]_{\odot}+(\Delta\delta_{rr})_{\odot}^{n}\\ (S_{\theta\theta})_{\odot}^{n+1}=(S_{\theta\theta})_{\odot}^{n}+2\mu\left[(\Delta\varepsilon_{\theta\theta})^{n+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\Delta V}{V}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right]_{\odot}\\ (\tau_{xr})_{\odot}^{n+1}=(\tau_{xr})_{\odot}^{n}+2\mu(\Delta\varepsilon_{xr})_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}+(\Delta\delta_{xr})_{\odot}^{n}\end{cases}\tag{12.544}
$$

7. 屈服条件

$$2J_{\odot}^{n+1} = (S_{xx}^2 + S_{rr}^2 + S_{\theta\theta}^2 + 2\tau_{xr}^2)_{\odot}^{n+1}$$

如若 $2J_{\odot}^{n+1} \leqslant \frac{2}{3}Y_0^2$ 时，如上算得的应力偏量不变

如若 $2J_{\odot}^{n+1} > \frac{2}{3}Y_0^2$ 时，则将如上求得的 $(S_{xx})_{\odot}^{n+1}$、$(S_{rr})_{\odot}^{n+1}$、$(S_{\theta\theta})_{\odot}^{n+1}$、$(\tau_{xr})_{\odot}^{n+1}$ 统乘以 $Y_0/\sqrt{3J_{\odot}^{n+1}}$，所求得的积作为真正的应力偏量。

8. 能量

$$e_{\odot}^{n+1} = \left\{ \frac{\rho^0 e^n - \left\{ \frac{1}{2}[H^{n+1} + p^n] + q^{n+\frac{1}{2}} \right\} \cdot (V^{n+1} - V^n) + \Delta Z^{n+\frac{1}{2}}}{\rho^0 + \frac{1}{2}B^{n+1} \cdot (V^{n+1} - V^n)} \right\}_{\odot} \tag{12.545}$$

其中(其实 H 就是(12.475)式中的 A，为避免混淆而改为 H)：

$$H_{\odot}^{n+1} = \left[b_1\left(\frac{1}{V} - 1\right) + b_2\left(\frac{1}{V} - 1\right)^2 + b_3\left(\frac{1}{V} - 1\right)^3 \right]_{\odot}^{n+1}$$

$$B_{\odot}^{n+1} = b_4\left(\frac{1}{V}\right)_{\odot}^{n+1}$$

$$\Delta Z_{\odot}^{n+\frac{1}{2}} = V_{\odot}^{n+\frac{1}{2}}[S_{xx} \cdot \Delta\varepsilon_{xx} + S_{rr} \cdot \Delta\varepsilon_{rr} + S_{\theta\theta} \cdot \Delta\varepsilon_{\theta\theta} + 2\tau_{xr} \cdot \Delta\varepsilon_{xr}]_{\odot}^{n+\frac{1}{2}} \tag{12.546}$$

9. 流体静压

$$p_{\odot}^{n+1} = H_{\odot}^{n+1} + B_{\odot}^{n+1} \cdot e_{\odot}^{n+1} \tag{12.547}$$

10. 全应力

$$\begin{cases} (\sigma_{xx})_{\odot}^{n+1} = (S_{xx})_{\odot}^{n+1} - (p^{n+1} + q^{n+\frac{1}{2}})_{\odot} \\ (\sigma_{rr})_{\odot}^{n+1} = (S_{rr})_{\odot}^{n+1} - (p^{n+1} + q^{n+\frac{1}{2}})_{\odot} \\ (\sigma_{\theta\theta})_{\odot}^{n+1} = (S_{\theta\theta})_{\odot}^{n+1} - (p^{n+1} + q^{n+\frac{1}{2}})_{\odot} \end{cases} \tag{12.548}$$

12.26.4 边界结点的数值计算

如上对网格结点 jk 的计算公式仅适用于正常的内点，对于各种类型的边界结点需要特殊处理。

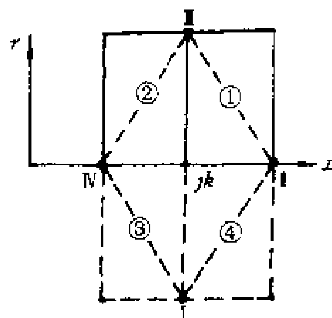


图 12.54

1. x 轴为固定边界

在轴对称情况下，x 轴当然为固定刚壁(在平面对称的情况下，假定运动在上半个平面中进行)。

假定结点 jk 处在 x 轴上。现以 x 轴为对称开拓，使之这个边界点变为"内点"，如图 12.54 所示，即在 x 轴的另一侧对称地构成两个假想的网格：③和④，并令这两个两格上的物理量满足如下条件，即：

$$\begin{cases} (\sigma_{xx}^n)_{④} = (\sigma_{xx}^n)_{①} \quad , \quad (\sigma_{xx}^n)_{③} = (\sigma_{xx}^n)_{②} \\ (\tau_{xr}^n)_{④} = -(\tau_{xr}^n)_{①} \quad , \quad (\tau_{xr}^n)_{③} = -(\tau_{xr}^n)_{②} \\ \rho_{④} = \rho_{①} \quad , \quad \rho_{③} = \rho_{②} \quad , \quad \dot{r}_{jk} = 0 \\ r_{\mathrm{I}} = -r_{\mathrm{II}} \quad , \quad x_{\mathrm{I}} = x_{\mathrm{II}} \end{cases} \tag{12.549}$$

将(12.549)式代进(12.533)式中则给出

$$\begin{cases} \dot{x}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{x}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} - \dfrac{\Delta t^n}{2\phi_{jk}^n}\{[(\sigma_{xx}^n)_{①} - (\sigma_{xx}^n)_{②}](r_{\mathrm{I}}^n - r_{\mathrm{II}}^n) - (\tau_{xr}^n)_{①}(x_{\mathrm{I}}^n - x_{\mathrm{II}}^n) \\ \quad - (\tau_{xr}^n)_{②}(x_{\mathrm{II}}^n - x_{\mathrm{N}}^n)\} + \alpha_{jk}^n \cdot \Delta t^n \\ \dot{r}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \tag{12.550}$$

注意，因为：$(r)_{④} = -(r)_{①}$，$(r)_{③} = -(r)_{②}$，所以据(12.534.2)式有

$$(\frac{M}{\rho A})_{①} = -(\frac{M}{\rho A})_{④}, \qquad (\frac{M}{\rho A})_{②} = -(\frac{M}{\rho A})_{③}$$

其中

$$\phi_{jk}^n = \frac{1}{4}[(\frac{\rho^0 A^n}{V^n})_{①} + (\frac{\rho^0 A^n}{V^n})_{②}] \tag{12.551.1}$$

$$\alpha_{jk}^n = \frac{1}{2}\left\{[\tau_{xr}^n(\frac{A^n}{M})]_{①} + [\tau_{xr}^n(\frac{A^n}{M})]_{②}\right\} \tag{12.551.2}$$

2. r 轴为固定边界

与上面的做法一样，仍按对称开拓，使边点变为"内点"，见图 12.55，即有：

$$\begin{cases} r_{\mathrm{N}}^n = r_{\mathrm{I}}^n, \qquad x_{\mathrm{I}}^n - x_{\mathrm{II}}^n = x_{\mathrm{II}}^n - x_{\mathrm{N}}^n \\ (\sigma_{rr}^n)_{①} = (\sigma_{rr}^n)_{②}, \quad (\sigma_{rr}^n)_{③} = (\sigma_{rr}^n)_{④} \\ (\sigma_{\theta\theta}^n)_{①} = (\sigma_{\theta\theta}^n)_{②}, \quad (\sigma_{\theta\theta}^n)_{③} = (\sigma_{\theta\theta}^n)_{④} \\ (\tau_{xr}^n)_{②} = -(\tau_{xr}^n)_{①}, \quad (\tau_{xr}^n)_{④} = -(\tau_{xr}^n)_{③} \\ M_{②} = M_{①} \quad , \quad M_{③} = M_{④} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \rho\ddot{r} = \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{\partial\tau_{xr}}{\partial x} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \end{cases}$$

将如上方程在所示的区域上差分，则给出：

$$\begin{aligned} \dot{r}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{r}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^n}{2\phi_{jk}^n}\{&[(\sigma_{rr}^n)_{①} - (\sigma_{rr}^n)_{④}](x_{\mathrm{I}}^n - x_{\mathrm{II}}^n) \\ &- (\tau_{xr}^n)_{①}(r_{\mathrm{I}}^n - r_{\mathrm{II}}^n) \\ &- (\tau_{xr}^n)_{④}(r_{\mathrm{I}}^n - r_{\mathrm{I}}^n)\} + \Delta t^n \cdot \beta_{jk}^n \end{aligned} \tag{12.552}$$

其中：

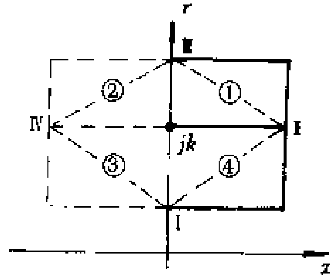


图 12.55

$$\begin{cases} \phi_{jk}^{n} = \dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{\rho^{0}A^{n}}{V^{n}}\right)_{①} + \left(\dfrac{\rho^{0}A^{n}}{V^{n}}\right)_{④}\right] \\ \beta_{jk}^{n} = \dfrac{1}{2}\{[(\sigma_{rr}^{n} - (\sigma_{\theta\theta}^{n})(A^{n}/M)]_{①} + [(\sigma_{rr}^{n} - \sigma_{\theta\theta}^{n})(A^{n}/M)]_{④}\} \end{cases} \tag{12.553}$$

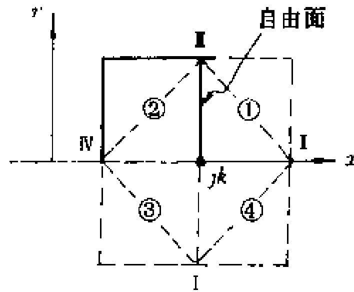


图 12.56

3. *在 x 轴上的拐角点 jk*

x 轴为固定边界，jk 点右邻为真空。求点 jk 的运动的做法基本如上，所不同的是在右边真空区任意划定一个四边形，然后，再以 x 轴作对称开拓使之所要求的点 jk 成为"内点"，见图 12.56。不过要假定真空区除几何尺度外，一切物理量都为零(须特殊处理的除外)。

对于自由面之外的假想网格，令

$$(\tau_{xr})_{①} = 0 \quad , \quad M_{①} = 0 \quad , \quad \rho_{①} = 0$$

这样做会使 $\left[\tau_{xr}^{n}\left(\dfrac{A^{n}}{M}\right)\right]_{①} = \dfrac{0}{0}$，现将这个不定值取作

$$\left[\tau_{xr}^{n}\left(\frac{A^{n}}{M}\right)\right]_{①} = \left[\tau_{xr}^{n}\left(\frac{A^{n}}{M}\right)\right]_{②}$$

将如上这些结果代进(12.533)式，则给出

$$\begin{cases} \dot{r}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ \dot{x}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{x}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} - \dfrac{\Delta t^{n}}{2\phi_{jk}^{n}}[(\sigma_{xx}^{n})_{②}(r_{Ⅱ}^{n} - r_{Ⅳ}^{n}) - (\tau_{xr}^{n})_{②}(x_{Ⅱ}^{n} - x_{Ⅳ}^{n})] + \alpha_{jk}^{n} \cdot \Delta t^{n} \end{cases}$$

(12.554)

$$\begin{cases} \alpha_{jk}^n = \left[\tau_{xr}^n\left(\frac{A^n}{M}\right)\right]_{②} \\ \phi_{jk}^n = \frac{1}{4}[\rho^0 A^n/V^n]_{②} \end{cases} \tag{12.555}$$

4. 在 r 轴的拐角点 jk

r 轴为固定边界，jk 点上方为真空，做法同上，以 r 轴作对称开拓，见图 12.57。这样便

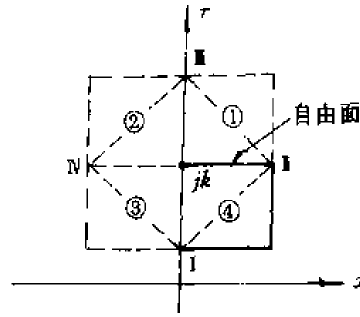


图 12.57

求得：

$$\begin{cases} \dot{r}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{r}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^n}{2\phi_{jk}^n}[(\sigma_{rr}^n)_{④}(x_{Ⅰ}^n - x_{Ⅰ}^n) - \\ \quad - (\tau_{xr}^n)_{④}(r_{Ⅰ}^n - r_{Ⅰ}^n)] + \Delta t^n \cdot \beta_{jk}^n \\ \dot{x}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \tag{12.556}$$

$$\begin{cases} \phi_{jk}^n = \frac{1}{4}(\rho^0 A_n/V^n)_{④} \\ \beta_{jk}^n = [(\sigma_{rr}^n - \sigma_{\theta\theta}^n)(A^n/M)]_{④} \end{cases} \tag{12.557}$$

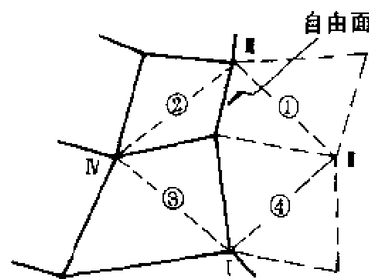


图 12.58

5. 自由面上的结点

设结点 jk 在自由点上，我们在真空区任划两个四边形，见图 12.58。在真空区除了几何尺度外，一切物理量均为零。由(12.533)式则给出：

$$\begin{cases} \dot{x}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{x}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t^n}{2\phi_{jk}^n}[(\sigma_{xx}^n)_{②}(r_{Ⅱ}^n - r_{Ⅳ}^n) + (\sigma_{xx}^n)_{③}(r_{Ⅳ}^n - r_{Ⅰ}^n) - \\ \quad - (\tau_{xr}^n)_{②}(x_{Ⅱ}^n - x_{Ⅳ}^n) - (\tau_{xr}^n)_{③}(x_{Ⅳ}^n - x_{Ⅰ}^n)] + \Delta t^n \cdot \alpha_{jk}^n \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dot{r}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{r}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t^n}{2\phi_{jk}^n}[(\sigma_{rr}^n)_{②}(x_{Ⅱ}^n - x_N^n) + (\sigma_{rr}^n)_{③}(x_N^n - x_Ⅰ^n) - \\
\qquad - (\tau_{xr}^n)_{②}(r_Ⅱ^n - r_N^n) - (\tau_{xr}^n)_{③}(r_N^n - r_Ⅰ^n)] + \Delta t^n \cdot \beta_{jk}^n
\end{cases}
\tag{12.558}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\phi_{jk}^n = \dfrac{1}{4}[(\rho^0 A^n/V^n)_{②} + (\rho^0 A^n/V^n)_{③}] \\
\alpha_{jk}^n = \dfrac{1}{2}\left[\left(\tau_{xr}^n \dfrac{A^n}{M}\right)_{②} + \left(\tau_{xr}^n \dfrac{A^n}{M}\right)_{③}\right] \\
\beta_{jk}^n = \dfrac{1}{2}\left\{\left[(\sigma_{rr}^n - \sigma_{\theta\theta}^n)\left(\dfrac{A^n}{M}\right)\right]_{②} + \left[(\sigma_{rr}^n - \sigma_{\theta\theta}^n)\left(\dfrac{A^n}{M}\right)\right]_{③}\right\}
\end{cases}
\tag{12.559}
$$

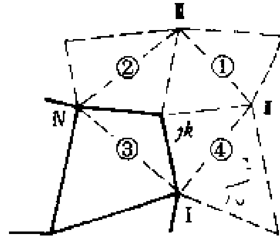


图 12.59

6. 自由面拐角点

设 jk 点为自由面拐角，我们仍在真空区任划定三个四边形(见图 12.59)，使 jk 变为“内点”。在三个真空区，除了几何尺度外，一切物理量均为零，由(12.533)式给出：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{x}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} - \dfrac{\Delta t^n}{2\phi_{jk}^n}[(\sigma_{xx}^n)_{③}(r_N^n - r_Ⅰ^n) - (\tau_{xr}^n)_{③}(x_N^n - x_Ⅰ^n)] + \Delta t^n \cdot \alpha_{jk}^n \\
\dot{r}_{jk}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{r}_{jk}^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t^n}{2\phi_{jk}^n}[(\sigma_{rr}^n)_{③}(x_N^n - x_Ⅰ^n) - (\tau_{xr}^n)_{③}(r_N^n - r_Ⅰ^n)] + \Delta t^n \cdot \beta_{jk}^n
\end{cases}
\tag{12.560}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\phi_{jk}^n = \dfrac{1}{4}[\rho^0 A^n/V^n]_{③} \\
\alpha_{jk}^n = [\tau_{xr}^n A^n/M]_{③} \\
\beta_{jk}^n = [(\sigma_{rr}^n - \sigma_{\theta\theta}^n)(A^n/M)]_{③}
\end{cases}
\tag{12.561}
$$

7. 滑移分界面

在两种介质的分界面，如流体与流体，流体和固体之间允许滑动，即界面两边的介质之间存在着相对运动。固体与固体之间也可存在着相对运动，但这里不做处理。

(1) 处理思想

当两种介质之间存在滑移时，如果按常规处理，网格势必要发生大的变形，要确切地反映出“滑移”，必须将滑移面上的网格点(结点)拆开。

设标号为 k 的那一行为滑移边界，而 k^n 表示 k 行在 $t = t^n$ 时的位置，并设：

k 以上为甲种介质，点 a、b 等为该种介质的网点；

k 以下为乙种介质，点 f 为乙介质的一个网点，而 f^n 表示 f 在 $t = t^n$ 时刻的空间位置，

而 f^{n+1} 为它在 $t=t^{n+1}$ 时刻的位置，见图 12.60 所示。

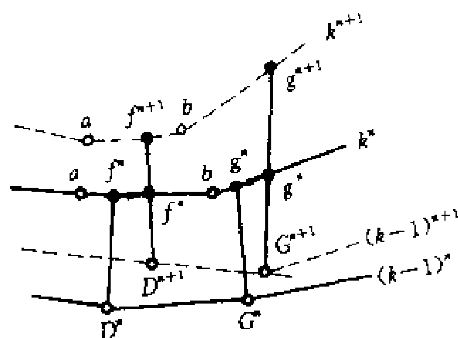


图 12.60

设甲介质为固体(亦可为流体)；乙介质为流体。

① 先假定：在 t^n 到 t^{n+1} 期间，甲介质"不动"，它作为乙介质的"固定"边界，乙介质在切向力的作用下沿界面滑动，即考虑乙介质沿 k^n 的切向运动分量，网点 f 由 $f^n\to f^*$.

② 计算甲介质的网点在乙介质的压力作用下，在 $\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$ 期间的运动，界面 k 由 $k^n\to k^{n+1}$.

③ 连接 D^{n+1}、f^* 两点间的直线，交于 k^{n+1} 线上的 f^{n+1} 点，f^{n+1} 便是乙介质的两点 f 在 $t=t^{n+1}$ 时刻的位置；而 D^{n+1} 是第 $(k-1)$ 行(即现图示的第 $(k-1)^{n+1}$ 行)上已求得的网格点，见图 12.60.

(D^{n+1} 是网点 D^n 在 t^{n+1} 时刻的位置，D^n 与 f^n 是在同条两格线上的两个网点)。

(2) 具体计算过程：

① 计算乙介质在甲介质面上的"滑移"

在 t^n 时刻各网点的位置与各网格、网点上的物理量已知，现考虑网点 f 沿 k^n 线的滑移，即计算 f 沿 k^n 线即沿 ab 段的滑移矢量：

$$\boldsymbol{R}_\tau = x_\tau\hat{i} + r_\tau\hat{r}_0$$

于是

$$\begin{cases}\rho\ddot{x}_\tau = G\cos\alpha \\ \rho\ddot{r}_\tau = G\sin\alpha\end{cases} \tag{12.562}$$

其中：

$$\begin{cases}G = \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial\sigma}{\partial r}\sin\alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{x_b - x_a}{\sqrt{(x_b-x_a)^2+(r_b-r_a)^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{r_b - r_a}{\sqrt{(x_b-x_a)^2+(r_b-r_a)^2}} \\ \sigma = -(p+q)\end{cases} \tag{12.563}$$

微分方程在如图 12.61 所示的多边形：eD^ngba 上作差分，将点 f^n 视作该多边形的"中心"，并将 e、a、b、g 近似地看作在同一条直线上，则在 t^{n+1} 时刻质点 f 沿 k^n 滑动的"新位置"f^*：

$$\begin{cases}x^* = x_f^n + \dot{x}_\tau^{n+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \\ r^* = r_f^n + \dot{r}_\tau^{n+\frac{1}{2}}\cdot\Delta t^{n+\frac{1}{2}}\end{cases} \tag{12.564}$$

其中：

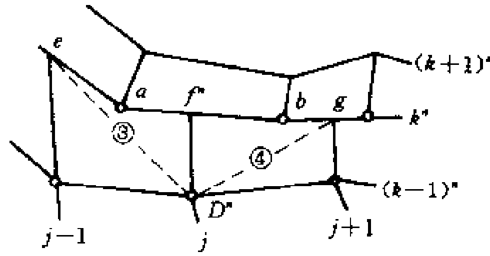


图 12.61

$$\begin{cases} \dot{x}_\tau^{n+\frac{1}{2}} = \dot{x}_\tau^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t^n}{2\phi_f^n} G_f^n \cdot \cos\alpha \cdot A^n \\ \dot{r}_\tau^{n+\frac{1}{2}} = \dot{r}_\tau^{n-\frac{1}{2}} + \dfrac{\Delta t^n}{2\phi_f^n} G_f^n \cdot \sin\alpha \cdot A^n \end{cases} \tag{12.565}$$

$$\begin{cases} G_f^n = \dfrac{1}{A^n}\{[(p+q)_{③}(r_e - r_D) + (p+q)_{④}(r_D - r_g)]^n\cos\alpha \\ \qquad - [(p+q)_{③}(x_e - x_D) + (p+q)_{④}(x_D - x_g)]^n\sin\alpha\} \\ \dot{x}_\tau^{n-\frac{1}{2}} = \dot{x}_f^{n-\frac{1}{2}}\cos\alpha \\ \dot{r}_\tau^{n-\frac{1}{2}} = \dot{r}_f^{n-\frac{1}{2}}\sin\alpha \\ \phi_f^n = \dfrac{1}{4}[(\rho^0 A^n/V^n)_{③} + (\rho^0 A^n/V^n)_{④}] \end{cases} \tag{12.566}$$

按计算经验将 $\dot{x}_\tau^{n-\frac{1}{2}}$ 和 $\dot{r}_\tau^{n-\frac{1}{2}}$ 取成 $\dot{x}_{j,k}^{n-\frac{1}{2}}{}_1$ 和 $\dot{r}_{j,k}^{n-\frac{1}{2}}{}_1$ 比较稳定[3]。

② 计算甲介质的网点运动

已知 b 点为甲介质在分界面上的一个网点，求该点的运动，甲介质为固体，运动方程为：

$$\begin{cases} \rho\ddot{x} = \dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xr}}{\partial r} + \dfrac{\tau_{xr}}{r} \\ \rho\ddot{r} = \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{\partial\tau_{xr}}{\partial x} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \end{cases} \tag{12.567}$$

将该微分方程在四边形 $abcB$ 上作差分，把 b 点视作该面元的“中心”，见图 12.62. 在 t^n 时刻，aB 上和 Bc 上的平均应力都已知(为各网格中心点的值)，只是 ab 和 bc 上的平均压力未知(这两段边界邻接的为流体，只有压力)，这两个平均压力这样取：

过 $A_{①}$ 的中心 z 向 bc 边作垂线交于 $\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^n$ 线的 e 点，过 $A_{②}$ 的中心 Q 向 ab 边作垂线交于 $\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^n$ 线的 d 点，$\left(k-\dfrac{1}{2}\right)^n$ 线为邻接分界线 k^n 的那排乙介质网格中心间的连线。

在这里要判断 d、e 落在乙介质的哪两个网格中心的连线上(详细地，这里从略)。假定 e 和 d 的位置已经确定，比如 d 落在中心⑦和⑤之间的连线上，再用线性插值求出 d 点的压力值，然后就以 d 点的压力值代替 ab 上的平均压力。ac 上的平均压力同理可取。

于是可以求出 b 网点在 $t^{n+\frac{1}{2}}$ 时的速度 $\dot{x}_b^{n+\frac{1}{2}}$ 和 $\dot{r}_b^{n+\frac{1}{2}}$. 从面可以求得 t^{n+1} 时 b 点的坐标

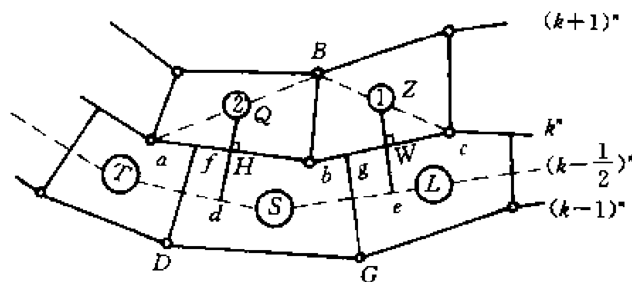


图 12.62

x_b^{n+1} 和 r_b^{n+1}。

通过这样的计算，便求出 t^{n+1} 时刻甲介质各网点的位置。从而得到 t^{n+1} 时刻滑移边界 K 的位置 k^{n+1}，见前而图 12.60。

③ 确定乙介质网点 f 在 t^{n+1} 时刻在滑移边界 k^{n+1} 上的位置。

连接图 12.60 所示的点 D^{n+1}、f^* 的直线，交 k^{n+1} 线于 f^{n+1}，f^{n+1} 便是 t^{n+1} 时刻网点 f 的位置。

这里存在着 f^{n+1} 到底落在折线 k^{n+1} 的哪一点的问题，具体判断这里从略。(详见文献 [3]、[4])

12.26.5 **稳定性条件**

$$\Delta t^{n+\frac{3}{2}} = \min\left\{\frac{1}{3}A^{n+1}/(\Gamma_{\max}^{n+1}\sqrt{(a_c^2+b_c^2)})\right\}_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \quad (12.568)$$

其中：
$$\begin{cases} \Gamma_{\max}\text{：网格的最大对角线} \\ a_c\text{：局部音速} \\ b_c = \begin{cases} 0, & \dot{V} \geqslant \text{时} \\ 2C_0(A^{n+1}/\Gamma_{\max}^{n+1})(\dot{V}/V)^{n+\frac{1}{2}}, & \dot{V} < 0\text{时} \end{cases} \\ C_0\text{：常数} \end{cases}$$

12.26.6 **并行算法对于 HEMP 模型的重要性**

由于 HEMP 是个大的数值计算模型，关系复杂，计算量大，必须提高计算速度。提高计算速度有两个途径：一是提高机器本身的运算速度；二是改进计算方法，并行算法(矢量化方法)就是应此而生，它代替了以前惯用的串行算法。从如上列示的差分方程组可以看出，HEMP 模型适合并行算法，比如在某个时刻计算某个物理量，可在空间各点上同时进行。国外早已对 HEMP 问题的程序进行了矢量化，为了说明并行算法对于 HEMP 问题的重要性(若使用并行程序，机器本身也须改为并行结构，如使用银河机，否则可能没有意义)，如下举个例子。这是美国劳伦斯实验室 (Lawrence Livermore Laboratory) 对一个问题的计算结果[10]，计算是分别在该实验室的"CDC—7600"(串行结构机器)上和"CDCSTAR—100"

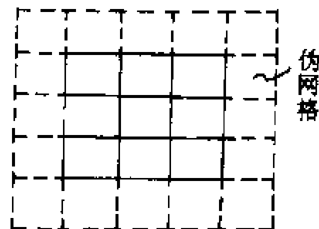


图 12.63

(并行结构机)上进行的。对于同一个问题,完全矢量化与非矢量化所用的时间差别很大,现将结果抄录如下:

STAR—100 的运算时间	CDC—7600 的运算时间
非矢量化:500min(分钟)	100min
完全矢量化:20min	100min

由此可见,将 HEMP 完全矢量化可以提高速度几倍,同时也看出在使用大型并行结构的计算机时,如果不将程序矢量化,反而可能费时。

上面已经谈到,在任一时刻计算某个物理量,可在空间各求值点上同时进行,为并行算法提供了条件,但是差分方程(指求结点速度的差分方程)在内结点和边结点形式是不同的。为了给并行算法提供更有利的条件,需要把边点和内点所用的差分方程的形式统一起来。在此我们提出一个初步设想:即将所考虑的区域开拓,在区域之外设伪网格即假想的虚网格,使边界点变为如图 12.63 所示的"内点"。当然在这种做法中,又可能会碰到新的问题需要处理。

12.27 绝热剪切带

固体材料,不论是金属还是非金属,在高速弹丸或金属射流的高速撞击、侵彻与穿孔

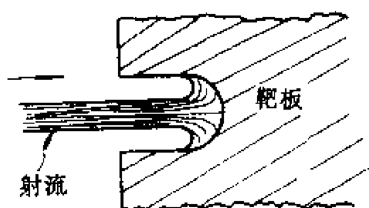


图 12.64

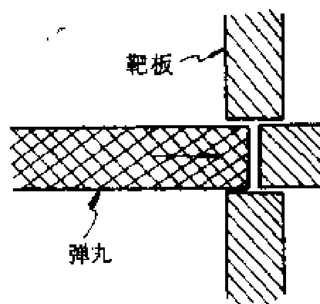


图 12.65

(见图 12.64 和图 12.65)的情况下,将产生一种重要的损伤现象——形成绝热剪切带(adiabatic shear band)。绝热剪切带存在很普遍。不仅在弹丸的高速撞击靶板时存在,在爆炸焊接、爆炸压接以及高速成形与高速切削中亦有。它是强冲击载荷作用下的一种重要损伤现象,在剪切带区容易形成微裂纹,见图 12.69,所以绝热剪切带在动载研究中倍受关注。

12.27.1 绝热剪切带的主要特征

在金属中,绝热剪切带的宽度约 10～100μm,在该区的应变可达 1～100,应变率可高达 10^5～10^7/s,温升能达 10^2～10^3K。由于带区很窄而周围的介质温度又低,所以在随后的冷却中,冷却速度可超过 10^5K/s,在这样的高速冷却下对于钢介质会造成由珠光体向马氏体的转变,从而形成很薄的隐晶马氏体层——白亮层(white band),见图 12.66。

在载荷均匀的情况下绝热剪切线与滑移线很相似,亦是网状。但外载很难均匀,因此在一般情况下绝热剪切带多呈图 12.67、图 12.68 和图 12.69 所示。图 12.66～12.69 并非"纯原金相照片",为了示意清楚,做了一定"加工"。

总结起来,它具有两个最基本的特征:①绝热剪切带是个变形高度集中的极窄区;②

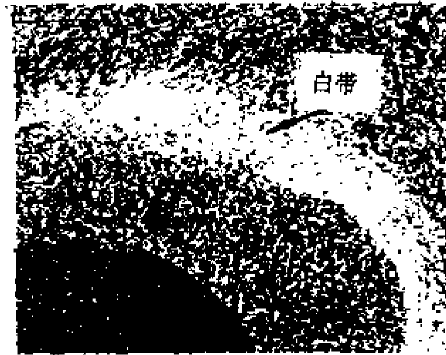


图 12.66

过程近似绝热，这是由于冲击变形的过程很快，由非弹性功产生热量而引起的温升时间视为瞬时，因此还“来不及”向生成带区的周围传递。

从绝热剪切带的显微观察表明，绝热剪切带分为两种基本类型：①以应变高度集中、晶粒剧烈拉长和破碎化为主要特征的形变带(deform band)；②以相变和重结晶为主要特征的转变带(transformed band)。

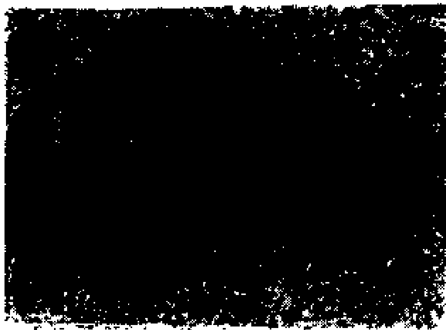


图 12.67

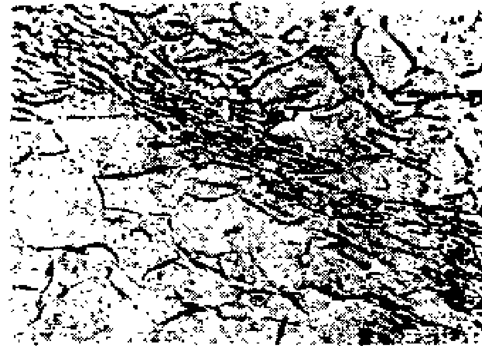


图 12.68

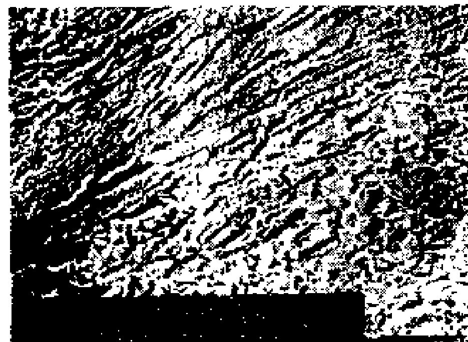


图 12.69

12.27.2 绝热剪切带形成的原因

根据绝热剪切带的基本特征，泽哪和浩洛芒(C. Zenor and J. H. Hollomon)在 1944 年

首先把绝热剪切解释为热塑性失稳，即归结为如下解释：在材料变形进入塑性后，一方面由于快速变形使材料产生硬化；另一方面由于塑性变形造成的温升而使材料软化。一旦软化作用超过硬化作用便产生失稳，这时随着应变的增加，应力反而下降，图 12.70 示意了

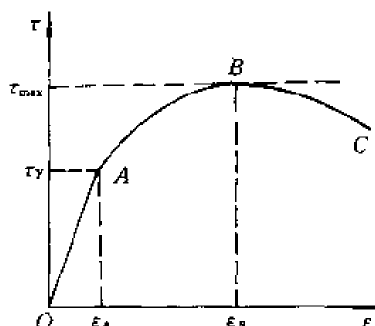


图 12.70

这种关系。该图为剪应力 τ 与剪应变 ε 之间的关系曲线，其中 τ_Y 为剪切屈服应力。在图示的应力应变曲线的 $\overset{\frown}{AB}$ 段，即在 $\varepsilon_A \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_B$ 时，$\varepsilon\nearrow$ 则 $\tau\nearrow$（亦即 $\frac{d\tau}{d\varepsilon}>0$），在此阶段硬化作用超过软化因素，为稳定塑性变形；在曲线的 $\overset{\frown}{BC}$ 段，即当 $\varepsilon>\varepsilon_B$ 时，ε 增加则 τ 减小（亦即 $\frac{d\tau}{d\varepsilon}<0$），在这个阶段软化作用超过硬化的影响，为不稳定塑性变形，即塑性失稳。

由以上分析看出稳定塑性变形与不稳定塑性变形的分界点 τ_{max}，即 $\frac{d\tau}{d\varepsilon}=0$ 处，则为热塑失稳的临界条件，即最大剪应力 τ_{max} 可作为绝热剪切带生成的准则。

译哪和浩洛芒成功地揭示了绝热剪切生成的原因，并给出了它的生成准则，他们为绝热剪切的研究奠定了基础，后来的研究都是在此基础之上的改进与发展。经过研究的深入，发现泽哪与浩洛芒的理论存在以下的不足之处：

①泽哪和浩洛芒的最大剪应力准则只能用来判断绝热剪切带的何时开始形成，而不能反映出绝热剪切是一个包含多个阶段的发展过程。

②泽哪与浩洛芒的热塑失稳理论，虽然把材料失稳现象从纯力学分析发展到热学与力学耦合分析，但没有计及应变率效应。

③泽哪与浩洛芒的最大剪应力准则，是把材料变形作为均质材料来处理的，然而显微观察发现绝热剪切带仅限于局部。若按均质模型，则很难分析剪切带的生成与发展。

④绝热假定当然是近似的，在剪切带的形成过程中，热传导还是存在的。

12.27.3 绝热剪切的分析描述

为了简单起见，我们分析一个简单的平面剪切应变情况，并假定材料为均匀分质。在此情况下，质点的位移为

$$\begin{cases}\tilde{U}=\tilde{u}\tilde{i}\\ \tilde{u}=\tilde{u}(y,t)\end{cases} \tag{12.569}$$

其中 u 为 x 向的位移分量，$\tilde{i}$ 为 x 轴向单位矢量。

由上式得到自然应变应变率

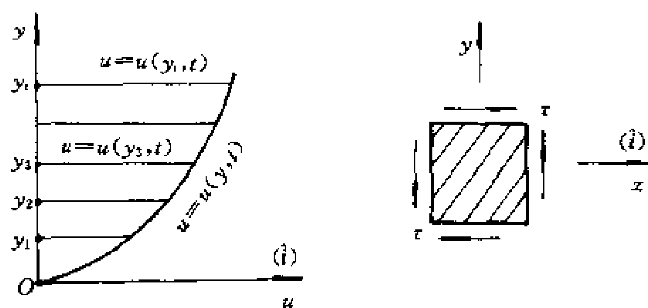


图 12.71

$$
\begin{cases}
\dot{\mathbf{E}} = \{\dot{\varepsilon}_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\varepsilon}_{12} & 0 \\ \dot{\varepsilon}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\dot{\varepsilon}_{12} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \dot{\bar{u}}}{\partial y} = \dot{\varepsilon}_{21}
\end{cases} \tag{12.570}
$$

根据各向同性介质的流体弹塑性本构关系；或根据各向同性介质，剪应变只产生剪应力，因而可确定应力张量呈如下形式

$$
\begin{cases}
\Sigma = \{\sigma_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\tau = \sigma_{12} = \sigma_{21}
\end{cases} \tag{12.571}
$$

根据现在的情况，且考虑到绝热(无热传导与热辐射)，在略去体力的情况下从能量方程(见后面的(12.587)式)得到

$$
\mathrm{d}T = \frac{\tau}{\rho C_V}\mathrm{d}\gamma \tag{12.572}
$$

其中，$T=T(y,t)$为温度，ρ 为密度，C_V 为定容比热，γ 为工程剪应变

$$
\gamma = 2\varepsilon \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \tag{12.573}
$$

按热与力耦合的静力学观点，τ 应作为如下形式的函数

$$
\tau = \tau(\gamma, T) \tag{12.574}
$$

在绝热无体力的情况下，温度的升高当然是应变引起的，正如式(12.572)所示，即 $T=T(\gamma)$。按泽娜与浩洛芒的最大剪应力的观点，绝热剪切生成时应有

$$
\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\gamma} = \frac{\partial\tau}{\partial\gamma} + \frac{\partial\tau}{\partial T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\gamma} = 0 \tag{12.575}
$$

将(12.572)代进上式，则给出**绝热剪切生成时的分析表达式**

$$
\frac{\partial\tau}{\partial\gamma} + \frac{\tau}{\rho C_V}\frac{\partial\tau}{\partial T} = 0 \tag{12.576}
$$

亦有的研究者将温度与应变的关系式(12.572)乘以折合系数 β，即有

$$
\mathrm{d}T = \frac{\beta T}{\rho C_V}\mathrm{d}\gamma, \quad \beta \approx 0.9 \tag{12.577}
$$

将上式代进(12.575)中则给出另一种形式的关系绝热剪切生成的表达式

$$\frac{\partial\tau}{\partial\gamma}+\frac{\beta\tau}{\rho C_V}\frac{\partial\tau}{\partial T}=0 \tag{12.578}$$

式(12.576)或(12.578)当然均对于绝热剪切生成的临界状态，当剪切带生成之后，则应有

$$-\frac{\partial\tau}{\partial T}\geqslant\frac{\rho C_V}{\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\gamma}\quad 或\quad -\frac{\partial\tau}{\partial T}\geqslant\frac{\rho C_V}{\beta\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\gamma} \tag{12.579}$$

上式较好地描述了绝热剪切带，并在工程上得到应用。但是该准则不能给出动力学规律。如下，我们给出"精确"的描述。

12.27.4 绝热剪切的动力学描述

根据连续介质运动方程组，在略去体力与热辐射的情况下，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\mathrm{div}\dot{\tilde{U}}=0\\ \rho\ddot{\tilde{U}}=\mathrm{div}\boldsymbol{\Sigma}\\ \rho\dot{e}=\boldsymbol{\Sigma}:\dot{\mathbf{E}}+\mathrm{div}(\lambda\mathrm{grad}T)\end{cases}$$

利用(12.569)～(12.571)式，上式可以化成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0\\ \rho\ddot{\tilde{u}}=\dfrac{\partial\tau}{\partial y}\\ \rho\dot{e}=2\tau\dot{\varepsilon}+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)\end{cases} \tag{12.580}$$

其中　$\lambda=\mathrm{const}$ 为热传导系数，$e=e(y,t)$为比内能，假若

$$e=e(T)=C_VT \tag{12.581}$$

且假定介质初始均匀，即初密度 ρ_0

$$\rho_0\equiv\mathrm{const} \tag{12.582}$$

又根据(12.569)式，则有

$$\dot{\tilde{u}}=\frac{\mathrm{d}\tilde{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla))\tilde{u}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} \tag{12.583}$$

$$\left(其中\quad \boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\tilde{U}}{\mathrm{d}t}=\dot{\tilde{U}}=\dot{\tilde{u}}\,\hat{i}\right)$$

同理

$$\ddot{\tilde{u}}=\frac{\mathrm{d}^2\tilde{u}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} \tag{12.584}$$

于是由(12.580)～(12.584)推出

$$\begin{cases}\rho=\mathrm{const}\\ \rho\dfrac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2\tau}{\partial y^2}\\ \tau\dfrac{\partial\gamma}{\partial t}=\rho C_V\dfrac{\partial T}{\partial t}-\lambda\dfrac{\partial^2T}{\partial y^2}\end{cases} \tag{12.585}$$

如上方程组当然要补充上在剪切带成立的本构关系：

$$\tau=\tau(\gamma,\dot{\gamma},T) \tag{12.586}$$

式(12.585)与(12.586)便构成了描述平面纯剪情况的封闭方程组。

从80年代起根据如上方程进行了一系列研究，得出了不少关于绝热剪切带的重要结果，有兴趣的读者可参阅有关文献[12,13]。

在(12.585)式中略去热传导项，则给出绝热条件下平面剪应变的能量方程

$$\tau \mathrm{d}\gamma=\rho C_V \mathrm{d}T \tag{12.587}$$

12.28 有限元法初步

有限无法(finite element method)是求解微分方程，特别是椭圆型边值问题的系统数值计算方法，它比传统解法具有理论完整可靠、物理意义直观明确、解题功能强等优点。而我们面临的许多动载固体力学问题由于结构的外形、边界条件等情况比较复杂，难以求得解析解，必须进行数值计算，有限元法恰恰适应了这一要求。

有限元法的基础是变分原理(principle of variations)和分割逼近，它是传统的里茨一加廖金方法(Ritz—Galerkin method)的发展，它把连续介质物体人为地分割成若干个有限部分(块体)，这些有限单元块体简称有限元(finite elements)。分割如图12.72所示，设这些有限单元体之间仅以若干个结点相互连结(结点在图中以圆黑点表示)，于是实际的物体则被这些离散的单元组合所代替。这个过程称结构的离散化(discreting)。然后，对这些单元求解，所求得的解便可近似于原物理问题的解。

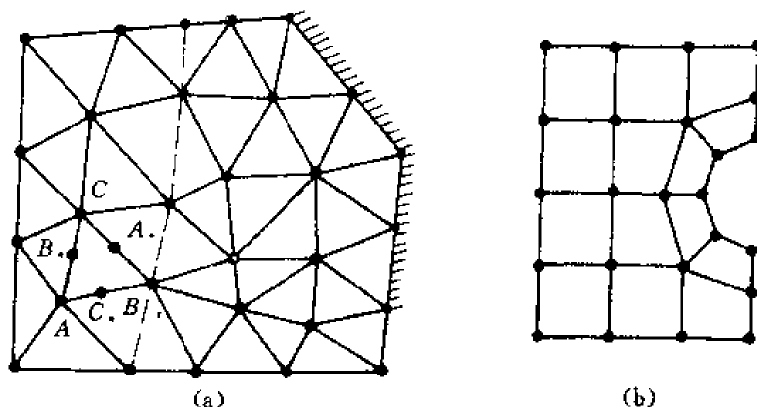


图12.72

离散化有很大的灵活性，单元的大小可以任定，其形状亦可任选，如取成三角形、四边形、以及曲边梯形等(如图12.72)所示)；单元与单元之间的连接可以各单元体的顶点相连接，即以顶点作为结点，亦可增加结点，例如图12.72中的“ΔABC”，它与周围单元则以A、$C_•$、B、$A_•$、C、$B_•$六个结点相连接。不过，在实际应用中，单元多为以其顶点作为结点的三角形。

在单元确定之后，就要选择描述问题的基本未知量，实施有限元的求解方法。其方法有位移法、力法和混合法，其中以位移法比较简单且适应性广，所以使用比较普遍。有限单元的位移法，实际上是里茨法的另一种形式，其基本方程可以用能量原理导出。当然，亦可

按“直接法”，直接导出基本方程。

本节是作为有限元法初步，故仅限于平面问题(平面应力和平面应变)，面且介质为弹性。使用位移法，并完全按文献[7]所述的直接法，直接导出基本方程，具体做法如下：

(1) 取结点的位移作为基本未知量。由于考虑的为平面问题，故假定结点是铰接的(hinge)，因此在任一个结点 i 上只有两向位移 u_i 和 v_i，如图 12.73(a)所示。(注意在这里“i”为某个固定结点的标号，如下将要使用的 j,k 等亦如此，它们并不同在前面诸章那样为在指标域中变化的自由指标；面 u_i 和 v_j 分别为 i 点的 x 轴向和 y 轴向的位移矢量分量)。

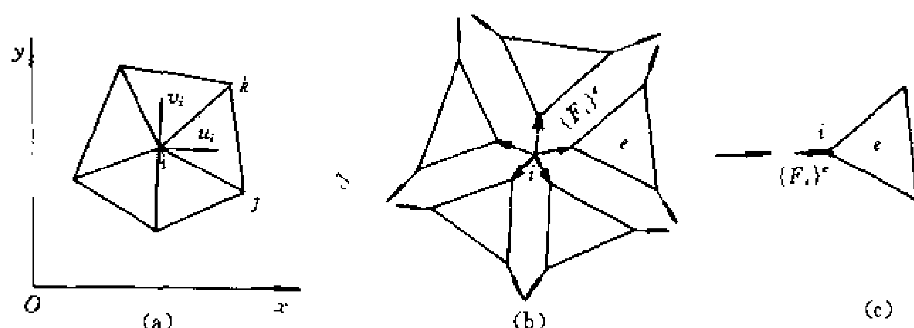


图 12.73

(2) 将已划分好单元的连续体(见图 12.73(a))设想成在公共结点处拆开(如图之(b)所示)，在每个“拆开”的单元如单元 e 的顶点有作用力，如图示的$\{F_i\}^e$，这个力称作结点力(knot force)。然后，对每个单元进行分析，以便建立基本未知量(结点的位移)与结点力之间的关系，这一过程称作单元分析(element analysis)。

(3) 整体分析。将每个结点所建立的平衡方程联立起来，这样便得一组描述整个物体的方程组，方程的个数等于结点位移分量的总数。

根据作用在各个结点上的已知外力(包括平移到结点上的外力)及支承条件，方程组可以定解。

(4) 解方程组，求出结点的位移，进而求得其他物理量。

12.28.1 **单元分析**

现考虑图 12.74 所示的平面三角形 ijk，在这个三角形单元的各顶点(结点)均作用有结点力，除此之外没有别的外力作用。每个结点的位移均有两个分量，于是整个单元的三个结点位移可由如下矢量表示：

$$\{\delta\}^e=\begin{Bmatrix}\{\delta_i\}\\\{\delta_j\}\\\{\delta_k\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\\u_k\\v_k\end{Bmatrix}\tag{12.588}$$

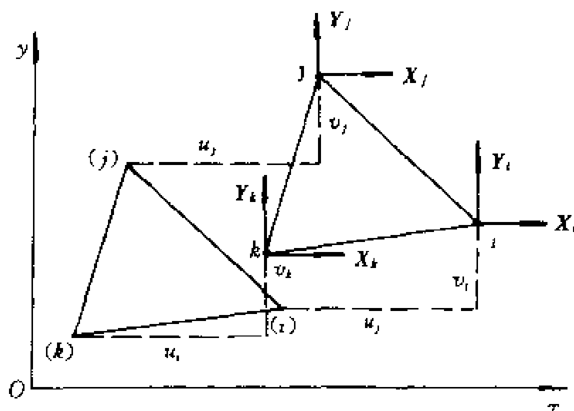


图 12.74

而在三个结点上的作用力矢量可表成如下矢量*：

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \{F_i\} \\ \{F_j\} \\ \{F_k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{Bmatrix} \tag{12.589}$$

在这里上标"e"是个自由指标，e 取值不同则代表不同的单元。

单元分析的目的是要建立结点位移矢量$\{\delta\}^e$ 与结点力矢量$\{F\}^e$ 之间的关系；并找出单元内部任一点的位移、应力和应变表达式。如下将按虚位移原理导出这种关系。

1. 位移函数

位移函数一般选成坐标变量的线性多项式，项数的多少与结点的个数有关，选取的原则是：

(1) 所选的线性位移函数既能描述单元内部各点又能描述它的各结点，即位移函数与各结点的位移不矛盾(实际上，位移函数中的待定系数，要由结点位移来决定)。

(2) 单元不同，其位移函数就不同，至少表现在多项式的系数上。然而各相邻单元的位移函数必须协调，即在公共结点(如图 12.73(a)中的 i 点)上位移必须取同值，当然在单元与单元的公用边界上亦应如此。

(3) 位移函数能反映出各单元的常应变状态并能表示单元的刚体位移状态。

上述条件也是保证单元分割收敛的准则。可以证明(具体从略)：在满足这样条件的位移函数情况下，只要把单元分割加密，所求得的解将收敛于问题的精确解。

对于三顶点(结点)的三角形单元，按如上原则，位移函数取成：

$$\begin{cases} u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases} \tag{12.590}$$

* 在本节，矢量按列阵表示时两边加大花括号。

或将位移矢量函数的这两个分量用矩阵表示

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \tag{12.591}$$

式(12.590)或(12.591)中的系数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_6$ 利用式(12.588)所示的单元三个结点的位移来确定,将(12.588)式代进这两式中,则给出

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \quad , \quad v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \quad , \quad v_j = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \quad , \quad v_k = \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k \end{cases} \tag{12.592}$$

在上式中 x_i, y_i、x_j, y_j、x_k, y_k 分别为单元三个结点的坐标。这三个结点的排列顺序按逆时针为:i 点→j 点→k 点(见图 12.74),由这三个结点构成的三角形面积△为

$$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} \tag{12.593}$$

由式(12.592)解出

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2\triangle}[(x_j y_k - x_k y_j)u_i + (x_k y_i - x_i y_k)u_j + (x_i y_j - x_j y_i)u_k] \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2\triangle}[(y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k] \\ \alpha_3 = \dfrac{1}{2\triangle}[(x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_k] \\ \alpha_4 = \dfrac{1}{2\triangle}[(x_j y_k - x_k y_j)v_i + (x_k y_i - x_i y_k)v_j + (x_i y_j - x_j y_i)v_k] \\ \alpha_5 = \dfrac{1}{2\triangle}[(y_j - y_k)v_i + (y_k - y_i)v_j + (y_i - y_j)v_k] \\ \alpha_6 = \dfrac{1}{2\triangle}[(x_k - x_j)v_i + (x_i - x_k)v_j + (x_j - x_i)v_k] \end{cases} \tag{12.594}$$

令:

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad , \quad b_i = y_j - y_k \quad , \quad c_i = x_k - x_j \\ a_j = x_k y_i - x_i y_k \quad , \quad b_j = y_k - y_i \quad , \quad c_j = x_i - x_k \\ a_k = x_i y_j - x_j y_i \quad , \quad b_k = y_i - y_j \quad , \quad c_k = x_j - x_i \end{cases} \tag{12.595}$$

利用如上两式可以将(12.590)式写成

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2\triangle}[(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_k + b_k x + c_k y)u_k] \\ v = \dfrac{1}{2\triangle}[(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_k + b_k x + c_k y)v_k] \end{cases} \tag{12.596}$$

上式表成矩阵形式为

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\}^e$$

$$= \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \tag{12.597}$$

其中

$$\begin{cases} N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/(2\triangle) \\ N_j = (a_j + b_j x + c_j y)/(2\triangle) \\ N_k = (a_k + b_k x + c_k y)/(2\triangle) \end{cases} \tag{12.598}$$

由式(12.596)可以看出：当 $u_i=1$，而 $v_i=u_j=v_j=u_k=v_k=0$ 时，则推出 $u=N_i$，此时的

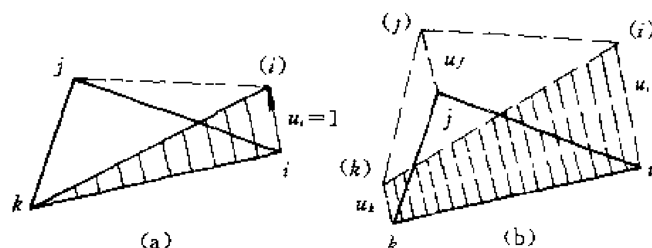


图 12.75

位移分布如图 12.75(a)所示，所以 N_i 表示结点 i 发生单位位移时其单元内部的位移分布形态；N_j 与 N_k 其意义类同。因此将 N_i、N_j 和 N_k 称作形态函数(configuration function)，而矩阵[N]称为形态矩阵(configuration matrix)。位移函数 $u=N_iu_i+N_ju_j+N_ku_k$(或 $v=N_iv_i+N_jv_j+N_kv_k$)决定了单元上的位移分布形式，如图 12.75(b)所示，因此位移函数又称作位移模式(displacement mode)。

2. *应变与应力*

在直角笛卡尔坐标系中，根据习用应变的位移与应变的关系(因为弹性小变形，故在此不再区别空间坐标与物质坐标，现用空间坐标)，有

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

工程剪切应变：

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

将应变分量 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}$ 与位移的关系用矩阵表示，为

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{12.599}$$

利用(12.597)式，上式又可写成

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N]\{\delta\}^e \tag{12.600}$$

令

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\triangle} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \tag{12.601}$$

$[B]$称作**几何矩阵**(geometry matrix)。利用上式，则(12.600)式缩写成

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e \tag{12.602}$$

对于同一个单元而言，矩阵$[B]$和$\{\delta\}^e$的各分量均为确定的不变值，因此$\{\varepsilon\}$的各分量也为常量，这说明采用线性位移函数描述单元内各质点位移时，单元内部各点应变取同值，从而应力也为常值。当然单元不同，应力与应变亦不同，即相邻单元之间的应力应变一般是不连续的。这是有限单元法近似的结果，但是当单元网格分得越来越细时，两个单元交界处的这种应力差将逐渐缩小。

由于现研究的为线弹性，应力应变则满足广义胡克定律，根据该定律则有

$$\begin{cases} \sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x \\ \sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} = G\gamma_{xy} \end{cases} \tag{12.603}$$

其中

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{12.604}$$

(1) 对于平面应力，$\sigma_z = 0$ 即有 $\varepsilon_z = -\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$，于是由上得出

$$\begin{cases}\sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x + \dfrac{E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_y \\ \sigma_y = \dfrac{E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_x + \dfrac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_y \\ \sigma_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}\end{cases} \tag{12.605}$$

将该式缩写成

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} \tag{12.606}$$

其中$[D]$称作弹性矩阵(elasticity matrix),对于所述的平面应力,它为

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{12.607}$$

(2) 对于平面应变,$\varepsilon_z=0$,于是由(12.603)式得到

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} \tag{12.608}$$

其中弹性矩阵$[D]$为

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\end{bmatrix} \tag{12.609}$$

将(12.602)式代进(12.606)式亦即(12.608)式中,给出

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e \tag{12.610}$$

3. 单元的刚度矩阵

现在根据虚位移原理推出结点位移与结点力之间的关系,设图12.74所示的三角形处于平衡状态。设给单元一种虚位移,而在该单元内部的位移仍按(12.590)式所示的线性分布,于是单元三个结点的虚位移$\{\delta^*\}^e$与单元内的虚应变$\{\varepsilon^*\}$则分别写成(参见(12.602)式)

$$\{\delta^*\}^e = \begin{Bmatrix}u_i^* \\ v_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ u_k^* \\ v_k^*\end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^*\end{Bmatrix} = [B]\{\delta^*\}^e \tag{12.611}$$

假定没有体力，只有(12.589)式所示的结点作用力，则单元三个结点力所做的总虚功 W 为：

$$W = X_i u_i^* + Y_i v_i^* + X_j u_j^* + Y_j v_j^* + X_k u_k^* + Y_k v_k^*$$

$$= [u_i^* \quad v_i^* \quad u_j^* \quad v_j^* \quad u_k^* \quad v_k^*] \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{bmatrix}$$

$$= (\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e \tag{12.612}$$

单位体积的虚应变能 $U_\triangle$ 为

$$U_\triangle = \varepsilon_x^* \sigma_x + \varepsilon_y^* \sigma_y + \gamma_{xy}^* \sigma_{xy}$$

$$= [\varepsilon_x^* \quad \varepsilon_y^* \quad \gamma_{xy}^*] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} \tag{12.613}$$

整个三角形单元体的总虚应变能 U 为

$$U = \int_{V^e} U_\triangle \mathrm{d}V^e$$

其中 V^e 为三角形单元的体积。如果三角形单元是等厚度为 h，则

$$V^e = h\triangle$$

由于在整个单元体上

$$\{\varepsilon^*\} = \text{const} \quad , \quad \{\sigma\} = \text{const} \quad , \quad \text{从而 } U_\triangle = \text{const}$$

于是得到对于等厚度的三角形单元，有

$$U = U_\triangle h \triangle$$

根据式(12.611)、(12.610)和(12.613)，则由上式得出

$$U = (\{\delta^*\}^e)^T [B]^T [D][B] \{\delta\}^e h \triangle \tag{12.614}$$

由于总虚功等于总虚应变能，即 $W=U$，于是由上式和(12.612)式得到(对于等厚度单元而言)

$$\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e \tag{12.615}$$

其中 $[K]^e$ 称作单元刚度矩阵(stiffness matrix of element)，它为

$$[K]^e = [B]^T [D][B] h \triangle$$

$$= \begin{bmatrix} [k_{ii}]^e_{2\times 2} & [k_{ij}]^e_{2\times 2} & [k_{ik}]^e_{2\times 2} \\ [k_{ji}]^e_{2\times 2} & [k_{jj}]^e_{2\times 2} & [k_{jk}]^e_{2\times 2} \\ [k_{ki}]^e_{2\times 2} & [k_{kj}]^e_{2\times 2} & [k_{kk}]^e_{2\times 2} \end{bmatrix} \tag{12.616}$$

每个单元的刚度矩阵有 9 个子矩阵，其中子矩阵 $[k_{rs}]^e_{2\times 2}$ 分两种情况：

(1) 对于平面应力，它为

$$[k_{rs}]^e_{2\times 2}=\frac{Eh}{4(1-\nu^2)\triangle}\cdot\begin{bmatrix} b_rb_s+\frac{1-\nu}{2}c_rc_s & \nu b_rc_s+\frac{1-\nu}{2}c_rb_s \\ \nu c_rb_s+\frac{1-\nu}{2}b_rc_s & c_rc_s+\frac{1-\nu}{2}b_rb_s \end{bmatrix} \tag{12.617}$$

$$(r=i,j,k \quad 和 \quad s=i,j,k)$$

(2) 对于平面应变，为

$$[k_{rs}]^e_{2\times 2}=\frac{E(1-\nu)h}{4(1+\nu)(1-2\nu)\triangle}\cdot\begin{bmatrix} b_rb_s+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}c_rc_s & \frac{\nu}{1-\nu}b_rc_s+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}c_rb_s \\ \frac{\nu}{1-\nu}c_rb_s+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}b_rc_s & c_rc_s+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}b_rb_s \end{bmatrix} \tag{12.618}$$

$$(r=i,j,k \quad 和 \quad s=i,j,k)$$

由式(12.617)或(12.618)看出：(12.616)式所示的刚度矩阵$[K]^e$是6×6的矩阵，即

$$[K]^e=[K]^e_{6\times 6} \tag{12.619}$$

4. 载荷向结点的移置

如上我们所考虑的载荷均作用在结点上，然而实际的作用载荷并不一定处在结点上。其作用在一个单元上的载荷分布是各种各样的，有的作用单元的边界上；有的作用在整个单元体上(如重力)。在按有限元方法处理时均应将它们合理地移到结点上，即在离散化的过程中，将所有的外力载荷等价地分配到各结点上。在一般情况下，移置到结点的载荷值，可根据虚位移原理来计算。对于我们现在采用的线性位移函数，可按平行力的合成与分解来处理，例如对图12.76所示的几种载荷的处理。

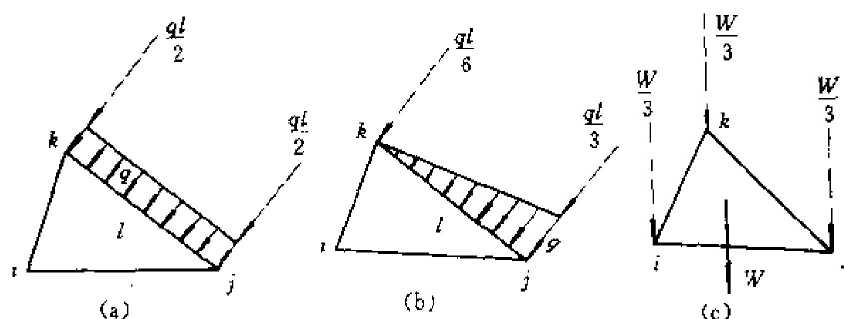


图12.76

对于图12.76(a)所示的载荷，移置到j点和k点上各为作用在jk边上总载荷的1/2，即为$ql/2$；对于图(b)所示的三角形分布的载荷，将其等效到j点和k点上分别为$ql/3$和$ql/6$。对于体力或集中载荷也是做类似的处理，例如对于图(c)所示的三角形单元上作用着均布体力，设其体力之和为W，则等效到三个顶点上各为$W/3$。

12.28.2 整体分析

在前一部分我们的分析是对于一个单元，我们对于单个单元体建立了结点位移和结点力之间的关系，即找出了单元的刚度矩阵。本部分将在此基础上，从结构的整体出发，建立起所有结点上的平衡条件。

1. 总平衡方程组

先考虑图 12.77(a)所示的一公共结点 t，作用在该结点上的整个外载荷(包括移置到该点上的等效载荷)为：

$$\{P_t\}=\begin{Bmatrix}P_{xt}\\P_{yt}\end{Bmatrix}\tag{12.620}$$

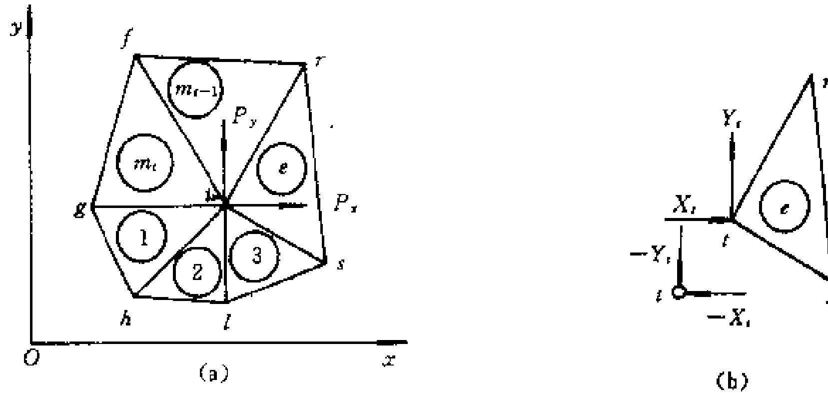


图 12.77

已知公共结点对单元 e 作用有结点力 $\{F_t\}^e$，则单元 e 对公共结点则有一个反作用力 $-\{F_t\}^e$，(它的两个分量为 $-X_t$ 和 $-Y_t$，而 $\{F_t\}^e$ 的两个分量为 X_t 和 Y_t)，如图之(b)所示。当然，交汇于 t 点的所有单元(即单元 $1,2,\cdots,m_e$)都对该点存在着这样的作用力。于是在 t 点的平衡条件则表成

$$\{P_t\}-\sum_{e=1}^{m_e}\{F_t\}^e=0\tag{12.621}$$

现考虑各个单元对 t 点的具体作用力。对于其中的一个三角形单元如单元 e，其整个单元的变形力(应力)与作用在三个顶点(结点)的力之间关系已由(12.615)式给出，再据(12.589)、(12.588)以及(12.616)式则有

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix}\{F_i\}^e\\\{F_j\}^e\\\{F_k\}^e\end{Bmatrix}=[K]^e\begin{Bmatrix}\{\delta_i\}^e\\\{\delta_j\}^e\\\{\delta_k\}^e\end{Bmatrix}$$

即有

$$\begin{Bmatrix}\{F_i\}^e\\\{F_j\}^e\\\{F_k\}^e\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[k_{ii}]^e & [k_{ij}]^e & [k_{ik}]^e\\ [k_{ji}]^e & [k_{jj}]^e & [k_{jk}]^e\\ [k_{ki}]^e & [k_{kj}]^e & [k_{kk}]^e\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\delta_i\}^e\\\{\delta_j\}^e\\\{\delta_k\}^e\end{Bmatrix}\tag{12.622}$$

上式明确给出作用在一个单元各个结点上的力与变形力之间的关系，如作用在 e 单元的第 i 点上的力为

$$\{F_i\}^e=[k_{ii}]^e\{\delta_i\}^e+[k_{ij}]^e\{\delta_j\}^e+[k_{ik}]^e\{\delta_k\}^e\tag{12.623}$$

其中

$$\{F_i\}^e=\begin{Bmatrix}X_i^e\\Y_i^e\end{Bmatrix},\quad \{\delta_i\}^e=\begin{Bmatrix}u_i^e\\v_i^e\end{Bmatrix},\quad \{\delta_j\}^e=\begin{Bmatrix}u_j^e\\v_j^e\end{Bmatrix},\quad \{\delta_k\}^e=\begin{Bmatrix}u_k^e\\v_k^e\end{Bmatrix}$$

在使用(12.622)式时，可将自由指标 e 取成 $1,2,\cdots,m_t$，与此相应地将每个单元各结点的标号按逆时针的顺序取代(12.622)式中的 i,j,k，例如对于图 12.77 中的单元①(即 $e=1$)，这时取 $i=t$、$j=g$、$k=h$，以此类推，……。于是利用(12.622)式便可从(12.621)式求得在 t 点总的平衡方程

$$
\begin{aligned}
\{P_t\} = (& [k_{tt}]^1\{\delta_t\} + [k_{tg}]^1\{\delta_g\} + [k_{th}]^1\{\delta_h\} \\
& + [k_{tt}]^2\{\delta_t\} + [k_{th}]^2\{\delta_h\} + [k_{tl}]^2\{\delta_l\} + \cdots \\
& + [k_{tt}]^e\{\delta_t\} + [k_{ts}]^e\{\delta_s\} + [k_{tr}]^e\{\delta_r\} + \cdots \\
& + [k_{tt}]^{m_t}\{\delta_t\} + [k_{tf}]^{m_t}\{\delta_f\} + [k_{tg}]^{m_t}\{\delta_g\}
\end{aligned}
\tag{12.624}
$$

将对 t 点平衡方程即上式整理后，写成：

$$
\begin{aligned}
\{P_t\} = & [K_{tt}]\{\delta_t\} + [K_{tg}]\{\delta_g\} + \cdots + [K_{ts}]\{\delta_s\} \\
& + \cdots + [K_{tf}]\{\delta_f\}
\end{aligned}
\tag{12.625}
$$

其中

$$
\begin{cases}
[K_{tt}] = \sum_{e=1}^{m_t}[k_{tt}]^e \\
[K_{tg}] = [k_{tg}]^1 + [k_{tg}]^{m_t} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[K_{tf}] = [k_{tf}]^{m_t-1} + [k_{tf}]^{m_t}
\end{cases}
\tag{12.626}
$$

如上的考虑是对于整个结构中的一个结点的。但由此依"法"行事，可以组成对于其结构所有结点的总体平衡方程组，经整理后写成

$$
[K]\{\delta\} = \{P\} \tag{12.627}
$$

其中 $\{\delta\}$ 是表示结构的所有结点的位移矢量的，即它为由 $\{\delta_1\}$、$\{\delta_2\}$、…、$\{\delta_k\}$ 所组成的列矢量矩阵：

$$
\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \vdots \\ \{\delta_n\} \end{Bmatrix} \tag{12.628}
$$

而矢量 $\{P\}$ 是由结构的所有结点上的载荷(包括等价地移置到各结点上的载荷)、以及支反力所组成的列矢量矩阵：

$$
\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \vdots \\ \{P_n\} \end{Bmatrix} \tag{12.629}
$$

在式(12.627)中的 $[K]$ 称作结构的总体刚度矩阵(total stiffness matrix)，简称为总刚矩阵。对于分割后具有 n 个结点的平面结构体，$\{\delta\}$ 和 $\{P\}$ 均为 $2n$ 维的列矢量，而 $[K]$ 是个 $2n\times 2n$ 阶的方阵。

构成总刚矩阵是有限元法中的重要步骤。由关系式(12.627)所定义的总刚矩阵是由各单元的单元刚度矩阵所构成，具体地讲它是由式(12.626)所示的那样诸子阵所组成。如

对图 12.77(a)所示的单元结构的总刚矩阵[K]可表成如下样式。

$$
[K]=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1,2\cdots & r & s & & t & \cdots n \end{array}\\
\left[\begin{array}{c:c:c:c}
 & & & \\
\hdashline
 & & & \\
\hdashline
 & [k_{tr}]^e+[k_{tr}]^{m_t-1} & [k_{ts}]^3+[k_{ts}]^e & [k_{tt}]^1+[k_{tt}]^2+\cdots+[k_{tt}]^{m_t} \\
\hdashline
 & & &
\end{array}\right]
\begin{array}{c} 1\\ 2\\ \vdots\\ s\\ t\\ \vdots\\ n \end{array}
\end{array}
$$

该矩阵的第 t 行是由(12.626)式亦即由它的如下缩写形式给出，其缩写式为

$$[K_{t\eta}]=\sum_e [k_{t\eta}]^e \tag{12.630}$$

其中的求和号 $\sum\limits_e$ 表示对以“$t\eta$”为下标的诸子阵求和，求和子阵个数等于同含有以 t 和 η 为其结点标号的所有单元的个数。例如对图 12.77，当 $\eta=t$ 时，则 $e=1,2,\cdots,m_t$，即共有 m_t 个以“tt”为下标标号的子矩阵求和，当 $\eta\neq t$，如 $\eta=r$，则有两个以“tr”为下标的两个子矩阵作和，见如上的矩阵，并参见图 12.77(a)。

具体操作时，可先将总刚矩阵所有的元素全置零，然后计算各单元的刚度矩阵，并将各子阵按下标“对号入座”填入预设的总刚矩阵中，例如由单元②求出$[k_{tt}]^2$ 后，将它加到总刚矩阵的 l 行 t 列的子阵中，从而逐步形成总刚矩阵。

此外，由(12.630)式则有

$$
\begin{aligned}
[K_{ts}]^T &= (\sum_e [k_{ts}]^e)^T = \sum_e ([k_{ts}]^e)^T \\
&= \sum_e [k_{st}]^e = [K_{st}]
\end{aligned} \tag{12.631}
$$

2. 坐标变换

在建立总体平衡方程时，我们是按各单元结点力的各分量对同一坐标系计算的。但在实际计算时，对于某些单元的刚度矩阵，有时为了方便，则按其本身的局部坐标系写出的，在此情况下，在构造总刚度矩阵之前，须将该单元的刚度矩阵进行坐标变换。

现考虑图 12.78 所示的情况，设结构的总体坐标系为 $o'x'y'$，而单元的局部坐标系为 jxy，由图可知，单元的一个结点 i 的结点力之分量在两个坐标系中的关系为

$$\{F'_i\}=\begin{Bmatrix} X'_i \\ Y'_i \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \tag{12.632}$$

其中 α 为 jxy 坐标系相对 $o'x'y'$ 系的变转角。

令变换矩阵为$[a]^e$：

$$[a]^e=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{12.633}$$

子是(12.632)式写成

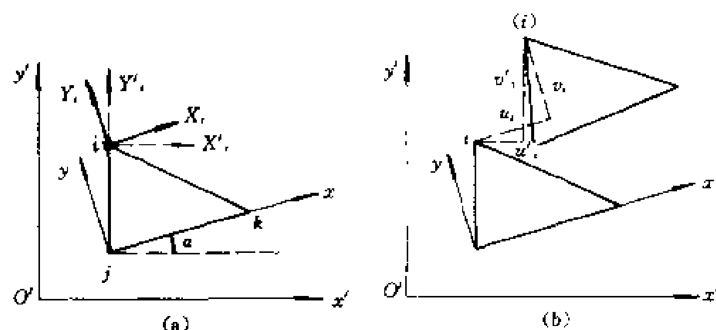


图 12.78

$$\{F'_i\}^e = [a]^e\{F_i\}^e \tag{12.634}$$

因此整个单元 e 的三个结点力矢量的变换关系则为

$$\{F'\}^e = [A]^e\{F\}^e \tag{12.635}$$

其中变换矩阵 $[A]^e$ 为

$$[A]^e = \begin{bmatrix} [a]^e & 0 & 0 \\ 0 & [a]^e & 0 \\ 0 & 0 & [a]^e \end{bmatrix} \tag{12.636}$$

由图 12.78 还可看出，在两个坐标系之间其位移分量的关系为

$$\begin{cases} u_i = u'_i\cos\alpha + v_i\sin\alpha \\ v_i = -u_i\sin\alpha + v'_i\cos\alpha \end{cases} \tag{12.637}$$

于是有

$$\{\delta\}^e = ([A]^e)^T\{\delta'\}^e \tag{12.638}$$

如果在整体坐标系中单元 e 的刚度矩阵为 $[K']^e$，据(12.615)式亦有如下形式

$$\{F'\}^e = [K']^e\{\delta'\}^e \tag{12.639}$$

而将(12.615)式代进(12.635)式中，并利用(12.638)式又给出

$$\begin{aligned}\{F'\}^e &= [A]^e[K]^e\{\delta\}^e \\ &= [A]^e[K]^e([A]^e)^T\{\delta'\}^e\end{aligned} \tag{12.640}$$

将上式与(12.639)式比较，则得到在整体坐标系中单元 e 的刚度矩阵为

$$[K']^e = [A]^e[K]^e([A]^e)^T \tag{12.641}$$

3. 结合算例：如何求刚度矩阵

设有一边长为 A、厚度为 h 的正方形板，如图 12.79(a)所示，其材料的弹性模量为 E，泊松比 $\nu=0.1$，求它的总刚矩阵。

将板离散成两个单元，如图 12.79(b)所示。先求单元①的刚度矩阵，然后再求单元②的。

(1) 确定单元①的刚度矩阵

按图 12.79(c)所示，结点 i,j,k 的坐标为

$$\begin{cases} x_4 = x_i = A\ ,\ x_1 = x_j = 0\ ,\ x_3 = x_k = 0 \\ y_4 = y_i = 0\ ,\ y_1 = y_j = A\ ,\ y_3 = y_k = 0 \end{cases} \tag{12.642}$$

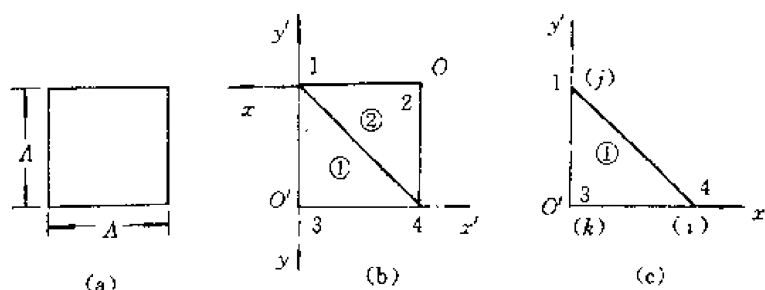


图 12.79

将如上的坐标代进(12.595)式中得到

$$\begin{cases} b_i = A \quad , \quad b_j = 0 \quad , \quad b_k = -A \\ c_i = 0 \quad , \quad c_j = A \quad , \quad c_k = -A \end{cases} \tag{12.643}$$

而三角形单元①的面积△，根据(12.593)式并将(12.642)式的值代入，则给出(当然，按现给定的情况可以直接求出)

$$\triangle = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & A & 0 \\ 1 & 0 & A \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{A^2}{2} \tag{12.644}$$

将式(12.643)和(12.644)代进(12.601)式中，给出

$$[B] = \frac{1}{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{12.645}$$

将 $\nu=0.1$ 和 E 代进(12.607)式中，给出对于平面应力的$[D]$为

$$[D] = \frac{E}{0.99}\begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.45 \end{bmatrix} \tag{12.646}$$

将式(12.646)、(12.644)和(12.645)代进式(12.616)中，则给出单元①的刚度矩阵：

$$[K]^1 = \begin{bmatrix} [k_{ii}]^1 & [k_{ij}]^1 & [k_{ik}]^1 \\ [k_{ji}]^1 & [k_{jj}]^1 & [k_{jk}]^1 \\ [k_{ki}]^1 & [k_{kj}]^1 & [k_{kk}]^1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1 & -1 & -0.1 \\ 0 & 0.45 & 0.45 & 0 & -0.45 & -0.45 \\ 0 & 0.45 & 0.45 & 0 & -0.45 & -0.45 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 & -0.1 & -1 \\ -1 & -0.45 & -0.45 & -0.1 & 1.45 & 0.55 \\ -0.1 & -0.45 & -0.45 & -1 & 0.55 & 1.45 \end{bmatrix} \tag{12.647}$$

(2) 预构图 12.79(a)所示正方形的总刚度矩阵$[K]$

构成总刚矩阵可按如下步骤进行：

先作出 8×8 方阵$[K]_0$,令所有元素充零(这里共有 4 个结点,故$[K]$为 8×8 阶方阵),即:

$$
[K]_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array}
$$

为便于说明起见,已将$[K]_0$分为 4 行、4 列的子阵。

然后,将单元①和单元②给出的刚度矩阵的各子阵分批代进如上方阵中。对于单元①而言,由式(12.647)可求得各子阵。根据:$i=4$,$j=1$,$k=3$,则有

$$
\begin{cases}
[k_{ii}]^1 = [k_{44}]^1 = \dfrac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.45 \end{bmatrix} \\
[k_{ij}]^1 = [k_{14}]^1 = \dfrac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix} 0 & 0.45 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix} \\
[k_{ik}]^1 = [k_{34}]^1 = \dfrac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix} -1 & -0.45 \\ -0.1 & -0.45 \end{bmatrix} \\
[k_{jj}]^1 = [k_{11}]^1 = \dfrac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix} 0.45 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
[k_{jk}]^1 = [k_{13}]^1 = \dfrac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix} -0.45 & -0.45 \\ -0.1 & -1 \end{bmatrix} \\
[k_{kk}]^1 = [k_{33}]^1 = \dfrac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix} 1.45 & 0.55 \\ 0.55 & 1.45 \end{bmatrix}
\end{cases}
\tag{12.648}
$$

其它子阵可由对称性写出。

现在将上述单元刚度矩阵的各子阵按下标号码加到$[K]_0$的相应子阵中。

例如,把$[k_{44}]^1$加到$[K]_0$的第 4 行第 4 列的子阵中,其余类推。不难得出:

$$
[K]_1 = \frac{Eh}{1.98} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc} 0.45 & 0 & 0 & 0 & -0.45 & -0.45 & 0 & 0.45 \\ & 1 & 0 & 0 & -0.1 & -1 & 0.1 & 0 \\ \hdashline & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline & & & & 1.45 & 0.55 & -1 & -0.45 \\ & & & & & 1.45 & -0.1 & -0.45 \\ \hdashline & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & \text{称} & & & 0.45 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{array}
$$

如上只在总刚矩阵中填入单元①的各子阵，还缺单元②的各子阵。

(3) 确定单元②的刚度矩阵

对图12.79(b)所示的单元②，若将其结点视作 $1=i,\ 4=j,\ 2=k$，则在局部坐标系 oxy 中看单元②的刚度矩阵，完全与在整体坐标系 $o'x'y'$ 中描述的单元①的刚度矩阵相同。而该局部坐标系相对整体坐标转动为180°，即 $\alpha=\pi$，于是根据(12.633)式与(12.636)式，则得变换矩阵

$$[A]^2=-[I]_{6\times6}$$

$[I]_{6\times6}$ 为6×6阶的单位矩阵。利用变换矩阵可将 oxy 系所描述单元②的刚度矩阵 $[K]^2$ 变成整体坐标系中描述的单元刚度矩阵 $[K']^2$，据式(12.641)，则有

$$[K']^2=[A]^2[K]^2([A]^2)^T=[K]^2$$

于是根据(12.647)式，单元②在整体坐标系中描述的各子阵为

$$\left\{\begin{aligned}
&[k'_{11}]^2=\frac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.45\end{bmatrix}\\
&[k'_{14}]^2=\frac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix}0 & 0.1\\ 0.45 & 0\end{bmatrix}\\
&[k'_{12}]^2=\frac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix}-1 & -0.1\\ -0.45 & -0.45\end{bmatrix}\\
&[k'_{44}]^2=\frac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix}0.45 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\
&[k'_{24}]^2=\frac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix}-0.45 & -0.1\\ -0.45 & -1\end{bmatrix}\\
&[k'_{22}]^2=\frac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix}1.45 & 0.55\\ 0.55 & 1.45\end{bmatrix}
\end{aligned}\right.\tag{12.649}$$

其余子阵由对称性确定。

(4) 总刚矩阵的确定

将式(12.649)的那些子阵，按其下标“对号入座”加到 $[K]_1$ 的对应部位的子阵中，从而获得总刚矩阵：

$$[K]=\frac{Eh}{1.98}$$

$$
\cdot\begin{bmatrix}
1.45 & 0 & -1 & -0.1 & -0.45 & -0.45 & 0 & 0.55 \\
 & 1.45 & -0.45 & -0.45 & -0.1 & -1 & 0.55 & 0 \\
 & & 1.45 & 0.55 & 0 & 0 & -0.45 & -0.1 \\
 & & & 1.45 & 0 & 0 & -0.45 & -1 \\
 & \text{对} & & & 1.45 & 0.55 & -1 & -0.45 \\
 & & & & & 1.45 & -0.1 & -0.45 \\
 & & \text{称} & & & & 1.45 & 0 \\
 & & & & & & & 1.45
\end{bmatrix}
\begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \\ \end{matrix}
\quad (\text{列块: } 1,\ 2,\ 3,\ 4)
\tag{12.650}
$$

4. 总刚矩阵的奇异性

观察如上的总刚矩阵会发现，对于[K]的每一行的矩阵元素之和均为零。这一结论对于任何结构的总刚矩阵都如此。在此，我们予以简单证明：

假若整个结构没有变形，只有刚性位移，即可令：

$$\{\delta\} = \{1,1,\cdots,1\}^T$$

由于只有刚性位移，所以作用在各结点的外载荷包括等价移置到结点上的外载荷应均为零(否则应有变形)，即有

$$\{P\} = \{0,0,\cdots,0\}^T$$

如果用 c_{ij} 表示总刚矩阵[K]中的各元素，则由(12.627)式推出每一行元素之和为零：

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} c_{1j} = c_{11} + c_{12} + \cdots + c_{1n} = 0 \\
\sum_{j=1}^{n} c_{2j} = c_{21} + c_{22} + \cdots + c_{2n} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{j=1}^{n} c_{nj} = c_{n1} + c_{n2} + \cdots + c_{nn} = 0
\end{cases}
$$

由此可知[K]是奇异矩阵。

由于总刚矩阵是奇异矩阵，则由总平衡方程(12.627)式求解位移将无唯一解，因此必须再补充条件才能定解，这个条件就是边界支承条件。

从物理实际来考虑，在没有支承约束的情况下，位移可不定解，因可做“任意”的刚体位移。支承条件有的在问题中明确给出；有的虽未给出，但可按问题的实际自己确定。如求图 12.80 所示板中圆孔周围的应力，可根据对称性只取 1/4，如图 12.80(b)所示，从而可以确定支承条件：在 y 轴上的结点 $u=0$、在 x 轴上的结点 $v=0$。

5. 对总体平衡方程组的修正

由于总体刚度矩阵[K]的奇异性，必须在总体平衡方程组(12.627)式中加上支承条件，才能求解。通常采用如下办法修改总体平衡方程组，做法是：

为了下面叙述方便起见，总体刚度矩阵不再分块表示，直接用元素 c_{ij} 写出，而总体平

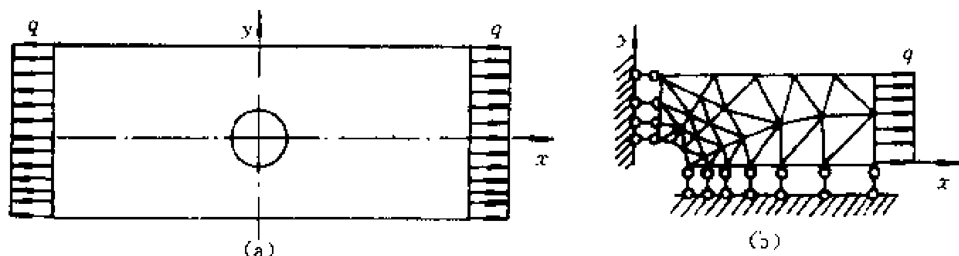


图 12.80

衡方程组可写成

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ \vdots \\ P_{xt} \\ P_{yt} \\ \vdots \\ P_{xn} \\ P_{yn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,2t-1} & c_{1,2t} & \cdots & c_{1,2n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,2t-1} & c_{2,2t} & \cdots & c_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{2t-1,1} & c_{2t-1,2} & \cdots & c_{2t-1,2t-1} & c_{2t-1,2t} & \cdots & c_{2t-1,2n} \\ c_{2t,1} & c_{2t,2} & \cdots & c_{2t,2t-1} & c_{2t,2t} & \cdots & c_{2t,2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{2n-1,1} & c_{2n-1,2} & \cdots & c_{2n-1,2t-1} & c_{2n-1,2t} & \cdots & c_{2n-1,2n} \\ c_{2n,1} & c_{2n,2} & \cdots & c_{2n,2t-1} & c_{2n,2t} & \cdots & c_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_t \\ v_t \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \tag{12.651}$$

假如某一结点 t 有约束条件 $u_t=0$，则应在总平衡方程组中，将相应于 $2t-1$ 行(注意每一结点对应于 2 行)的方程代换为：

$$u_t = 0 \tag{12.652}$$

于是，可将总刚矩阵$[K]$中第 $2t-1$ 行的对角线元素改为 1(即 $c_{2t-1,2t-1}=1$)，而非对角线元素 $c_{2t-1,s}=0$(其中 $s\neq 2t-1$)，(与此相应地，在上式中，其结点载荷的列阵$\{P\}$中第 $2t-1$ 个分量亦取成零，即 $P_{xt}=0$)；同时根据$[K]$的对称性，则$[K]$的第 $2t-1$ 列除对角线上那个元素($c_{2t-1,2t-1}$)外，余者全为零。于是矩阵$[K]$表成

$$[K] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & 0 & c_{1,2t} & \cdots & c_{1,2n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2,2t} & \cdots & c_{2,2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{2t,1} & c_{2t,2} & \cdots & 0 & c_{2t,2t} & \cdots & c_{2t,2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{2n-1,1} & c_{2n-1,2} & \cdots & 0 & c_{2n-1,2t} & \cdots & c_{2n-1,2n} \\ c_{2n,1} & c_{2n,2} & \cdots & 0 & c_{2n,2t} & \cdots & c_{2n,2n} \end{bmatrix} \tag{12.653}$$

假如结点 t 有约束条件 $u_t=u_0$，u_0 为某一非零已知值。这时可将总体刚度矩阵中对角线元素 $c_{2t-1,2t-1}$ 去乘一个很大的数 A(例如取 $A=10^{10}$)，而左边结点荷载 P_{xt} 改为 $Ac_{2t-1,2t-1}u_0$，即将方程组中第 $2t-1$ 个方程改为：

$$c_{2t-1,1}u_1 + c_{2t-1,2}v_1 + \cdots + Ac_{2t-1,2t-1}u_t$$
$$+ c_{2t-1,2t}v_t + \cdots + c_{2t-1,2n}v_n$$

$$= Ac_{2i-1,2i-1}u_0 \tag{12.654}$$

由于此式中除了包含 A 的两项外，其余各项相对来说都很小，可以忽略不计，因此，此式相当于 $u_i=u_0$。

6. 结合算例：如何用有限元法求解

设有一边长为 Λ、厚度为 h 的正方形薄板。上边界受有均布荷载 $q=\dfrac{2P}{\Lambda}$ 作用，左上角受一水平集中力 P 作用，如图 12.81(a)所示。材料的弹性模量为 E，泊松比 $\nu=0.1$。用有限单元法求力 P 作用点的位移。

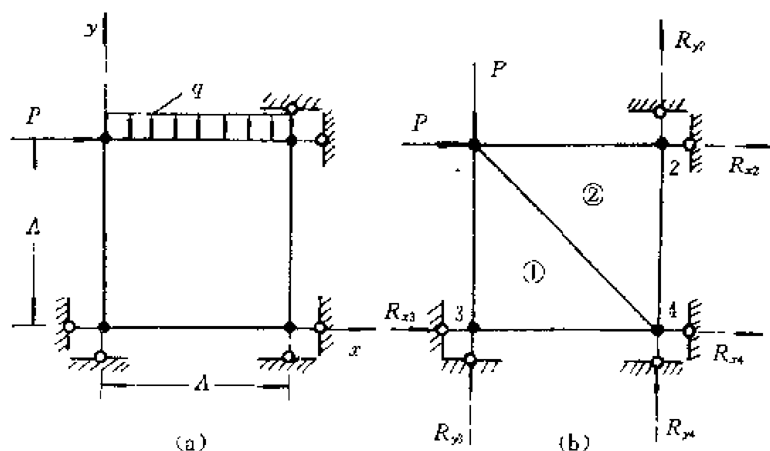


图 12.81

解

(1) 将结构离散化。为了简单起见，仍将板划分为如图 12.81(b)所示的两个单元。并对各结点及单元加以编号：①和②。

(2) 构成总体刚度矩阵。显然，这里可直接引用式(12.650)的结果。

(3) 移置结点荷载。按上所述，上边界的均布荷载应由作用于结点 1、2 上的等效集中力 $\dfrac{1}{2}\dfrac{2P}{\Lambda}\Lambda=P$ 来代替。但由于结点 2 有竖向约束，故不必考虑该点的作用力(求支座反力时才要考虑)。这样在结点 1 即有

$$P_{x1}=P,\quad P_{y1}=-P$$

如果用 R_{x2}，R_{y2}，…，R_{y4} 表示支座反力[见图 12.81(b)]，则总体平衡方程组可写

$$\begin{Bmatrix} P \\ -P \\ R_{x2} \\ R_{y2} \\ R_{x3} \\ R_{y3} \\ R_{x4} \\ R_{y4} \end{Bmatrix}=\frac{Eh}{1.98}\begin{bmatrix} 1.45 & 0 & -1 & -0.1 & -0.45 & -0.45 & 0 & 0.55 \\ & 1.45 & -0.45 & -0.45 & -0.1 & -1 & 0.55 & 0 \\ & & 1.45 & 0.55 & 0 & 0 & -0.45 & -0.1 \\ & & & 1.45 & 0 & 0 & -0.45 & -1 \\ & & & & 1.45 & 0.55 & -1 & -0.45 \\ \text{对} & & & & & 1.45 & -0.1 & -0.45 \\ & & \text{称} & & & & 1.45 & 0 \\ & & & & & & & 1.45 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

(4) 引入支承条件,修改总刚矩阵和荷载列阵。这里的约束条件为:

$$u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = 0$$

因此按以上所述,将总体平衡方程组修改为(参照(12.652)和(12.653)式):

$$\begin{Bmatrix} P \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{1.98} \begin{bmatrix} 1.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1.45 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

(5) 解如上方程组,给出结点 1 的位移

$$u_1 = \frac{1.98P}{1.45Eh} = 1.366\frac{P}{Eh}$$

$$v_1 = \frac{-1.98P}{1.45Eh} = -1.366\frac{P}{Eh}$$

附录12.1 自然应变分析

（仅供参考）

一、自然应变增量张量

1. 质点运动轨迹

在直角坐标系中质点运动轨迹 $\boldsymbol{r}$ 表示为

$$\boldsymbol{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x = f(a,b,c,t) \\ y = g(a,b,c,t) \\ z = h(a,b,c,t) \end{cases} \tag{2}$$

其中(a,b,c)为质点坐标，即质点标号。

质点(a,b,c)在 $t=t_0$ 时刻，处于空间点(x_0,y_0,z_0)，则由(2)式得到

$$\begin{cases} f(a,b,c,t_0) = x_0 \\ g(a,b,c,t_0) = y_0 \\ h(a,b,c,t_0) = z_0 \end{cases}$$

由上式求得

$$\begin{cases} a = a(x_0,y_0,z_0) \\ b = b(x_0,y_0,z_0) \\ c = c(x_0,y_0,z_0) \end{cases}$$

将上式代进(2)式中，得到

$$\begin{cases} x = f(a(x_0,y_0,z_0),b(x_0,y_0,z_0),c(x_0,y_0,z_0),t) = f_*(x_0,y_0,z_0,t) \\ y = g(a(x_0,y_0,z_0),b(x_0,y_0,z_0),c(x_0,y_0,z_0),t) = g_*(x_0,y_0,z_0,t) \\ z = h(a(x_0,y_0,z_0),b(x_0,y_0,z_0),c(x_0,y_0,z_0),t) = h_*(x_0,y_0,z_0,t) \end{cases} \tag{3}$$

即把质点的标号(a,b,c)换成(x_0,y_0,z_0)。

2. 质点位移与位移差

设在 $t=t_0$ 时刻，质点 A 处于空间点 Q，见附图12.1，Q 点的坐标为(x_0,y_0,z_0)，如果考虑到(3)式，则

$$\begin{cases} x_0 = f_*(x_0,y_0,z_0,t_0) \\ y_0 = g_*(x_0,y_0,z_0,t_0) \\ z_0 = h_*(x_0,y_0,z_0,t_0) \end{cases} \tag{4}$$

在该时刻$(t=t_0)$，质点 A 附近的另一质点 B 处于空间点 Q'，Q' 点的坐标为(x'_0,y'_0,z'_0)，而

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 + \delta x_0 \\ y'_0 = y_0 + \delta y_0 \\ z'_0 = z_0 + \delta z_0 \end{cases} \tag{5}$$

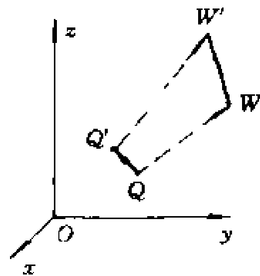
如果考虑到(3)式，则有

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 + \delta x_0 = f_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0) \\ y'_0 = y_0 + \delta y_0 = g_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0) \\ z'_0 = z_0 + \delta z_0 = h_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0) \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\delta x_0,\delta y_0,\delta z_0$ 均为无穷小量。

在 $t=t_0+\Delta t$ 时刻，质点 A 由 Q 点移至空间点 W，由(3)式可以求得 W 点的坐标：

$$\begin{cases} x = f_*(x_0,y_0,z_0,t_0+\Delta t) \\ y = g_*(x_0,y_0,z_0,t_0+\Delta t) \\ z = h_*(x_0,y_0,z_0,t_0+\Delta t) \end{cases} \tag{7}$$



附图 12.1

在该时刻质点 B 由 Q' 点移至空间点 W'，由(3)式可以求得 W' 点的坐标：

$$\begin{cases} x' = f_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0+\Delta t) \\ y' = g_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0+\Delta t) \\ z' = h_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0+\Delta t) \end{cases} \tag{8}$$

在从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 期间，质点 A 的位移分量：

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} = x - x_0 = f_*(x_0,y_0,z_0,t_0+\Delta t) - f_*(x_0,y_0,z_0,t_0) \\ \Delta\tilde{v} = y - y_0 = g_*(x_0,y_0,z_0,t_0+\Delta t) - g_*(x_0,y_0,z_0,t_0) \\ \Delta\tilde{w} = z - z_0 = h_*(x_0,y_0,z_0,t_0+\Delta t) - h_*(x_0,y_0,z_0,t_0) \end{cases} \tag{9}$$

质点 B 的位移分量：

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}' = x' - x'_0 = f_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0+\Delta t) - f_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0) \\ \Delta\tilde{v}' = y' - y'_0 = g_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0+\Delta t) - g_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0) \\ \Delta\tilde{w}' = z' - z'_0 = h_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0+\Delta t) - h_*(x'_0,y'_0,z'_0,t_0) \end{cases} \tag{10}$$

在 t_0 时刻，质点 A 和 B 之间的间距矢量为 $\overrightarrow{QQ'}$，由(5)式可知它等于 $\delta\boldsymbol{r}_0$：

$$\delta\boldsymbol{r}_0 = \delta x_0\hat{\boldsymbol{i}} + \delta y_0\hat{\boldsymbol{j}} + \delta z_0\hat{\boldsymbol{k}} \tag{11}$$

在 $t_0+\Delta t$ 时刻，质点 A 和 B 之间的间距矢量变为 $\overrightarrow{WW'}$，由(7)和(8)式求得它等于 $\delta\boldsymbol{r}$：

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{r} &= (x'-x)\hat{\boldsymbol{i}} + (y'-y)\hat{\boldsymbol{j}} + (z'-z)\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= \delta x\hat{\boldsymbol{i}} + \delta y\hat{\boldsymbol{j}} + \delta z\hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{12}$$

由(11)、(12)式以及(9)、(10)式可得微元矢量 $\delta\boldsymbol{r}_0$ 的改变量 $\Delta(\delta\boldsymbol{r})$：

$$\begin{aligned} \Delta(\delta\boldsymbol{r}) &= \delta\boldsymbol{r} - \delta\boldsymbol{r}_0 = (\delta x - \delta x_0)\hat{\boldsymbol{i}} + (\delta y - \delta y_0)\hat{\boldsymbol{j}} + (\delta z - \delta z_0)\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= [(x'-x)-(x'_0-x_0)]\hat{\boldsymbol{i}} + [(y'-y)-(y'_0-y_0)]\hat{\boldsymbol{j}} + [(z'-z)-(z'_0-z_0)]\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= [(x'-x'_0)-(x-x_0)]\hat{\boldsymbol{i}} + [(y'-y'_0)-(y-y_0)]\hat{\boldsymbol{j}} + [(z'-z'_0)-(z-z_0)]\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= [\Delta\tilde{u}'-\Delta\tilde{u}]\hat{\boldsymbol{i}} + [\Delta\tilde{v}'-\Delta\tilde{v}]\hat{\boldsymbol{j}} + [\Delta\tilde{w}'-\Delta\tilde{w}]\hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{13}$$

由上式看出微元 $\delta\boldsymbol{r}_0$ 的改变量 $\Delta(\delta\boldsymbol{r})$ 就是两质点的位移矢量之差。

将 $\Delta\tilde{u}$、$\Delta\tilde{u}'$、$\Delta\tilde{w}'$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处展开并取一级近似，即有：

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u}' = \Delta\tilde{u} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial x_0}\delta x_0 + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial y_0}\delta y_0 + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial z_0}\delta z_0 \\ \Delta\tilde{v}' = \Delta\tilde{v} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial x_0}\delta x_0 + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial y_0}\delta y_0 + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial z_0}\delta z_0 \\ \Delta\tilde{w}' = \Delta\tilde{w} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial x_0}\delta x_0 + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial y_0}\delta y_0 + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial z_0}\delta z_0 \end{cases} \tag{14}$$

于是(13)式可以写成

$$\Delta(\delta \boldsymbol{r}) = \delta \boldsymbol{r} - \delta \boldsymbol{r}_0 = \Delta \mathbf{K} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 \tag{15}$$

其中

$$\Delta \mathbf{K} = \{\Delta K_{ij}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\Delta \tilde{u})}{\partial x_0} & \frac{\partial(\Delta \tilde{u})}{\partial y_0} & \frac{\partial(\Delta \tilde{u})}{\partial z_0} \\ \frac{\partial(\Delta \tilde{v})}{\partial x_0} & \frac{\partial(\Delta \tilde{v})}{\partial y_0} & \frac{\partial(\Delta \tilde{v})}{\partial z_0} \\ \frac{\partial(\Delta \tilde{w})}{\partial x_0} & \frac{\partial(\Delta \tilde{w})}{\partial y_0} & \frac{\partial(\Delta \tilde{w})}{\partial z_0} \end{bmatrix} \tag{16}$$

3. 自然应变增量

将(16)式所示的 $\Delta\mathbf{K}$ 作和分解，分解成为对称张量 $\Delta\mathbf{E}$ 和反对称张量 $\Delta\mathbf{H}$，即有

$$\Delta \mathbf{K} = \Delta \mathbf{E} + \Delta \mathbf{H} \tag{17}$$

其中

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E} = \{\Delta \epsilon_{ij}\} = \{\frac{1}{2}(\Delta K_{ij} + \Delta K_{ji})\} \\ \Delta \mathbf{H} = \{\Delta h_{ij}\} = \{\frac{1}{2}(\Delta K_{ij} - \Delta K_{ji})\} \end{cases} \tag{18}$$

于是(15)式可以写成

$$\Delta(\delta \boldsymbol{r}) = \delta r - \delta r_0 = \Delta \mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 + \Delta \mathbf{H} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 \tag{19}$$

而上式中右边第二项可以改写成：

$$\Delta \mathbf{H} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 = \Delta \alpha \times \delta \boldsymbol{r}_0 \tag{20}$$

其中

$$\Delta \alpha = \Delta \alpha_x \hat{i} + \Delta \alpha_y \hat{j} + \alpha_z \hat{k} = \Delta \alpha_1 \hat{i} + \Delta \alpha_2 \hat{j} + \alpha_3 \hat{k} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \Delta \alpha_x = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Delta \tilde{w})}{\partial y_0} - \frac{\partial(\Delta \tilde{v})}{\partial z_0}\right] = \Delta \alpha_1 \\ \Delta \alpha_y = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Delta \tilde{u})}{\partial z_0} - \frac{\partial(\Delta \tilde{w})}{\partial x_0}\right] = \Delta \alpha_2 \\ \Delta \alpha_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Delta \tilde{v})}{\partial x_0} - \frac{\partial(\Delta \tilde{u})}{\partial y_0}\right] = \Delta \alpha_3 \end{cases} \tag{22}$$

利用(20)式，则(19)式改写成

$$\Delta(\delta \boldsymbol{r}) = \delta \boldsymbol{r} - \delta \boldsymbol{r}_0 = \Delta \mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 + \Delta \alpha \times \delta \boldsymbol{r}_0 \tag{23}$$

线元矢量 $\mathrm{d}r_0$ 之所变化了 $\Delta(\delta r)$，原因有两个：

①$\delta \boldsymbol{r}_0$ 发生了“纯变形”，即 δr_0 在 Δt 期间发生了伸长或缩短；

②$\delta \boldsymbol{r}_0$ 在 Δt 期间发生了旋转。

在式(23)中右边第一项表示 δr_0 的变形；第二项表示 δr_0 做刚体旋转。

现在来证明 $\Delta\mathbf{E} \cdot \delta r_0$ 表示 δr_0 的变形，即 $\Delta\mathbf{E}$ 是表示变形的张量。证明使用反推法，即若 $\delta \boldsymbol{r}_0$ 没有变形，则推出 $\Delta \epsilon_{ij}=0$.

因若 $\delta \boldsymbol{r}_0$ 没有变形，则有：

$$\delta r_0 = \delta r \quad , \quad (\delta r_0)^2 = (\delta r)^2 \tag{24}$$

而

$$\Delta(\delta r)^2 = \Delta(\delta \boldsymbol{r} \cdot \delta \boldsymbol{r}) = 2\delta \boldsymbol{r} \cdot \Delta(\delta r)$$

根据(24)式，则由上式得到

$$\delta \boldsymbol{r} \cdot \Delta(\delta \boldsymbol{r}) \equiv 0$$

而

$$\delta \boldsymbol{r} \cdot \Delta(\delta \boldsymbol{r}) = [\delta \boldsymbol{r}_0 + \Delta(\delta \boldsymbol{r})] \cdot \Delta(\delta \boldsymbol{r})$$
$$= \delta \boldsymbol{r}_0 \cdot \Delta(\delta \boldsymbol{r}) + \Delta(\delta \boldsymbol{r}) \cdot \Delta(\delta \boldsymbol{r}) \approx \delta \boldsymbol{r}_0 \cdot \Delta(\delta \boldsymbol{r})$$

于是则有
$$\Delta(\delta \boldsymbol{r}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 = 0$$

将(23)式代进上式，得到

$$0 = (\Delta \mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 + \Delta \boldsymbol{\alpha} \times \delta \boldsymbol{r}_0) \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 = (\Delta \mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0) \cdot \delta \boldsymbol{r}_0$$
$$= \Delta\varepsilon_{11} \delta x_0^2 + \Delta\varepsilon_{22} \delta y_0^2 + \Delta\varepsilon_{33} \delta z_0^2 +$$
$$+ 2\Delta\varepsilon_{12} \delta x_0 \delta y_0 + 2\Delta\varepsilon_{13} \delta x_0 \delta z_0 + 2\Delta\varepsilon_{23} \delta y_0 \delta z_0$$

由于 $\delta \boldsymbol{r}_0$ 是任取的，即 $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ 是任取的，因此由上式得到

$$\Delta\varepsilon_{11} = \Delta\varepsilon_{22} = \Delta\varepsilon_{33} = \Delta\varepsilon_{12} = \Delta\varepsilon_{13} = \Delta\varepsilon_{23} \equiv 0$$

即
$$\Delta\varepsilon_{ij} = 0 \tag{25}$$

关于 $\Delta\boldsymbol{\alpha} \times \delta \boldsymbol{r}_0$ 表示 $\delta \boldsymbol{r}_0$ 做刚体旋转，若用上面的结果，则不证自明。因如果 $\delta \boldsymbol{r}_0$ 不变形，即 $\Delta\varepsilon_{ij}=0$，则(23)式变成：

$$\Delta(\delta \boldsymbol{r}) = \delta \boldsymbol{r} - \delta \boldsymbol{r}_0 = \Delta \boldsymbol{\alpha} \times \delta \boldsymbol{r}_0 \tag{26}$$

而在 $\delta \boldsymbol{r}_0$ 不变形的情况下，$\delta \boldsymbol{r}_0$ 的改变量 $\Delta(\delta \boldsymbol{r})$ 只有 $\delta \boldsymbol{r}_0$ 做了刚体旋转，故 $\Delta\boldsymbol{\alpha} \times \delta \boldsymbol{r}_0$ 表示 $\delta \boldsymbol{r}_0$ 做刚体旋转。

表示与变形有关的张量 $\Delta \mathrm{E}$ 就是自然应变增量张量，据(18)式，它的分量：

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial x_0}, \quad \Delta\varepsilon_{12} = \Delta\varepsilon_{21} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial y_0} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial x_0}\right] \\ \Delta\varepsilon_{22} = \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial y_0}, \quad \Delta\varepsilon_{13} = \Delta\varepsilon_{31} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial z_0} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial x_0}\right] \\ \Delta\varepsilon_{33} = \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial z_0}, \quad \Delta\varepsilon_{23} = \Delta\varepsilon_{32} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial z_0} + \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial y_0}\right] \end{cases} \tag{27}$$

关于 $\Delta\varepsilon_{ij}$ 的物理意义，在一维变形时可以清楚地看出。在(23)式中若令 $\delta \boldsymbol{r}_0 = \delta x_0 \boldsymbol{i}$ 且变形只在 x 轴向，则得到

$$\delta x - \delta x_0 = \Delta\varepsilon_{11} \cdot \delta x_0$$

即
$$\Delta\varepsilon_{11} = \frac{\delta x - \delta x_0}{\delta x_0}$$

从上式可以清楚地看出，ε_{11} 是从 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 时刻所增加的应变。

二、自然应变应变率与变形速度张量

式(23)给出了由 t_0 时刻到 $t_0+\Delta t$ 时刻线元矢量的变化差 $\Delta(\delta \boldsymbol{r})$，如果令 $\Delta t \to 0$，则给出了线元矢量的变化率：

$$(\dot{\delta \boldsymbol{r}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\delta \boldsymbol{r})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta \mathbf{E} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta \boldsymbol{\alpha} \times \delta \boldsymbol{r}_0)}{\Delta t}$$
$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{E}}{\Delta t}\right) \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\alpha}}{\Delta t}\right) \times \delta \boldsymbol{r}_0$$
$$= \dot{\mathbf{E}} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{r}_0 \tag{28}$$

其中

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{E}} = (\dot{\varepsilon}_{ij}) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \mathrm{E}}{\Delta t} & \text{为自然应变应变率张量} \\ \omega = \dot{\alpha} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \alpha}{\Delta t} & \text{为角速度} \end{cases} \tag{29}$$

现在来求 $\dot{\mathrm{E}}$ 和 ω 各分量与速度的关系，据(27)式：

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11} &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial (\Delta \tilde{u})}{\partial x_0} \right) \right] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta \tilde{u}' - \Delta \tilde{u}}{\Delta x_0} \right) \right] \\ &= \lim_{\Delta x_0 \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x_0} \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{u}' - \Delta \tilde{u}}{\Delta t} \right) \right] = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \left[\frac{1}{\Delta x_0} \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{u}'}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \tilde{u}}{\Delta t} \right) \right] \\ &= \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{u' - u}{\Delta x_0} = \frac{\partial u}{\partial x_0} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} u = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \tilde{u}}{\Delta t} = u(x_0, y_0, z_0, t_0) & \text{为质点 } A \text{ 在 } t_0 \text{ 时刻的 } x \text{ 向速度分量} \\ u' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \tilde{u}'}{\Delta t} = u(x'_0, y'_0, z'_0, t_0) & \text{为质点 } B \text{ 在 } t_0 \text{ 时刻的 } x \text{ 向速度分量} \end{cases}$$

同理

$$\dot{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial v}{\partial y_0},\ \dot{\varepsilon}_{33} = \frac{\partial w}{\partial z_0},\ \dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\varepsilon}_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_{13} = \dot{\varepsilon}_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right),\ \dot{\varepsilon}_{23} = \dot{\varepsilon}_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right)$$

其中

$$\begin{cases} v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \tilde{v}}{\Delta t} = v(x_0, y_0, z_0, t_0) & \text{为质点 } A \text{ 在 } t_0 \text{ 时刻的 } y \text{ 向速度分量} \\ w = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \tilde{w}}{\Delta t} = w(x_0, y_0, z_0, t_0) & \text{为质点 } A \text{ 在 } t_0 \text{ 时刻的 } z \text{ 向速度分量} \end{cases}$$

由于 t_0 是任取的，x_0, y_0, z_0 随之亦是任意的，所以如上诸式中的 x_0, y_0, z_0, t_0 的下标"0"可以略去，于是(29)式中的 $\dot{\mathrm{E}}$ 可以写成：

$$\dot{\mathrm{E}} = (\dot{\varepsilon}_{ij}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \right) & \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \right) & \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{30}$$

即

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{31}$$

其中

$$u_1 = u,\ u_2 = v,\ u_3 = w$$

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$$

在(30)式的右端为变形速度张量，即自然应变应变率等于变形速度张量。

同理，由(22)式可以求得：

$$\omega = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2 \hat{j} + \omega_3 \hat{k} \tag{32}$$

$$\begin{cases} \omega_x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) = \omega_1 \\ \omega_y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) = \omega_2 \\ \omega_z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega_3 \end{cases} \tag{33}$$

即

$$\omega = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\boldsymbol{v} \tag{34}$$

其中

$$\boldsymbol{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} - u_3\hat{k} \tag{35}$$

注意，在连续介质中，导出介质中任一点(即质点)的任一种定义形式的应变张量，都是从过该点的一线段微元或微元体出发，然后推出其应变表达式。

三、自然应变的计算

自然应变张量与习用应变(工程应变)张量不同，一般给不出其应变分量与位移之间的关系，只能给出各个时刻应变增量张量的表达式，或应变率张量的表达式，于是求应变张量只能从自然应变增量张量或应变率张量来求它。

1. 根据自然应变增量来求

连续介质中任一质点即相当线段微元或微元体，它在运动中不断地旋转和变形。从一时刻到另一时刻，它不但发生了变形，而且发生了旋转。式(23)表明了这种变化，式中的 $\Delta\mathbf{E}$ 为自然应变增量张量，它是两个临近时刻的“纯应变之差”，与旋转角度 $\Delta\alpha$“无关”，即 $\Delta\alpha$ 的取值并不能决定 $\Delta\mathbf{E}$。这从下面的式子很容易看出，由(22)式和(27)式得到

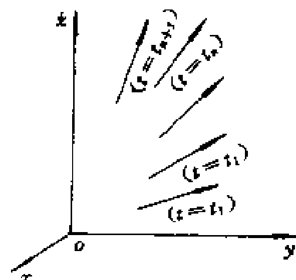
$$\begin{cases} \Delta\varepsilon_{11} = \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial x_0}, \quad \Delta\varepsilon_{12} = \Delta\varepsilon_{21} = \dfrac{\partial(\Delta\tilde{u})}{\partial y_0} + \Delta\alpha_3 \\ \Delta\varepsilon_{22} = \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial y_0}, \quad \Delta\varepsilon_{23} = \Delta\varepsilon_{32} = \dfrac{\partial(\Delta\tilde{v})}{\partial z_0} + \Delta\alpha_1 \\ \Delta\varepsilon_{33} = \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial z_0}, \quad \Delta\varepsilon_{13} = \Delta\varepsilon_{31} = \dfrac{\partial(\Delta\tilde{w})}{\partial x_0} + \Delta\alpha_2 \end{cases} \tag{36}$$

上式清楚地表明，即使 $\Delta\alpha$ 的各分量取定，$\Delta\mathbf{E}$ 的各分量仍不能确定。

由于 $\Delta\mathbf{E}$ 是“纯应变之差，无旋转因素在内”。所以在描述质点由两个时刻应变状态的应变张量求 $\Delta\mathbf{E}$ 时，应把这两个时刻的应变张量旋转到同一方位再求差，例如求 $t=t_n$ 时刻的应变增量张量 $\Delta\mathbf{E}_n$，它为

$$\Delta\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_{n+1}^T - \mathbf{E}_n \tag{37}$$

其中 $\mathbf{E}_n$ 为 t_n 时刻的应变张量，$\mathbf{E}_{n+1}^T$ 为将 t_{n+1} 时刻的应变张量 $\mathbf{E}_{n+1}$ 旋转 $-\Delta\alpha$ 角后的张量($\mathbf{E}_{n+1}^T$ 亦相当于把描述张量的空间固定坐标系旋转 $\Delta\alpha$ 角后表示的张量 $\mathbf{E}_{n+1}$)，$\Delta\alpha$ 为质点在 $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ 期间所旋转的角度。



附图 12.2

之所以需要将 $\mathbf{E}_{n+1}$ 旋转，是因为质点在 t_n 时刻与 t_{n+1} 时刻处于不同方位，见附图 12.2，即质点(线元)相对空间固定坐标系($oxyz$)的方位不

同。对于同样的应变状态，因其质点相对空间固定坐标系的方位不同，其应变张量亦不同(注意，这里所说的张量不同，是指张量 E 的分量 ε_{ij} 不同，不是指代表整个张量 E 的本身)，而 $\Delta\mathbf{E}$ 是 t_n 时刻质点所处方位上"纯应变之差"，故应消除 $\mathbf{E}_{n+1}$ 中因非变形因素——旋转所造成它与其处在 t_n 时刻方位上应变张量分量之差的部分。

如果一个质点，从变形开始 $t=t_1$ 到 $t=t_{n+1}$ 各个时刻上(即 $\Delta t_1=t_2-t_1, \Delta t_2=t_3-t_2, \cdots, \Delta t_n=t_{n+1}-t_n$)的应变张量增量 $\Delta\mathbf{E}_1, \Delta\mathbf{E}_2, \cdots, \Delta\mathbf{E}_n$ 以及旋转角度 $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \cdots, \Delta\alpha_n$ 已知，求 t_{n+1} 时刻的应变张量 $\mathbf{E}_{n+1}$，则须将历史上该质点所处各个方位上(见附图 12.2)的应变张量增量 $\Delta\mathbf{E}_i$ 均旋转到质点现在(t_{n+1} 时刻)所处方位上进行相加，即相当积分起来：

$$\mathbf{E}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\mathbf{E}_i^{\perp} = \Delta\mathbf{E}_1^{\perp} + \Delta\mathbf{E}_2^{\perp} + \cdots + \Delta\mathbf{E}_i^{\perp} + \cdots + \Delta\mathbf{E}_n^{\perp} \tag{38}$$

其中 $\Delta\mathbf{E}_i^{\perp}$ 是将张量 $\Delta\mathbf{E}_i$ 旋转 α_i 角，亦相当把空间固定坐标系(标架)旋转 $-\alpha_i$ 角后表示的 $\Delta\mathbf{E}_i$ 张量，在这里：

$$\alpha_i = \sum_{j=i}^{n} \Delta\alpha_j = \Delta\alpha_i + \Delta\alpha_{i+1} + \cdots + \Delta\alpha_n \tag{39}$$

2. 根据自然应变率来求

虽然自然应变难以给出明确的表达式，但自然应变张量的变化率 $\dot{\mathbf{E}}$ 的表达式却很明确，它就是变形速度张量，见(30)或(31)式。因此可以通过 $\dot{\mathbf{E}}$ 来求 E，但积分很困难，只能按差分方法。

根据 $\dot{\mathbf{E}}_n$ 的定义(29)式，以及 $\Delta\mathbf{E}_n$ 的定义(37)式，即有

$$\dot{\mathbf{E}}_n = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\mathbf{E}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t_{n+1}\to t_n} \frac{\mathbf{E}_{n+1}^{T} - \mathbf{E}_n}{t_{n+1} - t_n} \tag{40}$$

将上式化成差分，则有

$$\mathbf{E}_{n+1}^{T} - \mathbf{E}_n = \dot{\mathbf{E}}_n \Delta t \tag{41}$$

从而得到

$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n^{\perp} + (\dot{\mathbf{E}}_n)^{\perp} \Delta t \tag{42}$$

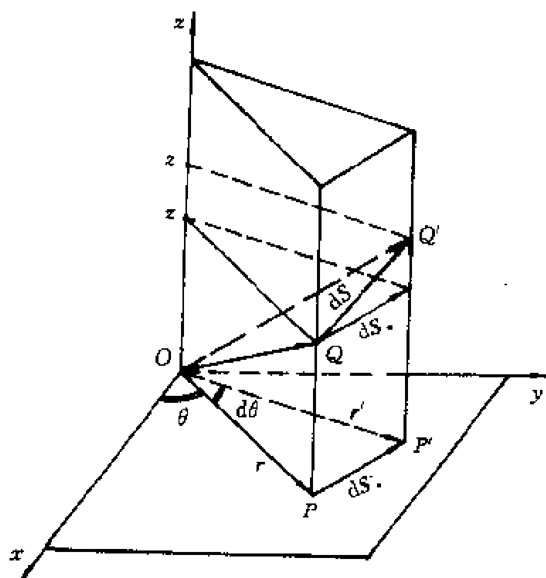
通过上式便可求 t_{n+1} 时刻的自然应变张量 $\mathbf{E}_{n+1}$。根据(42)式，亦可求得质点从变形开始到之后各个时刻的应变值。

在应用(42)式，因考虑到该式右边第二项相对较小，旋转修正影响不大，故有时取成

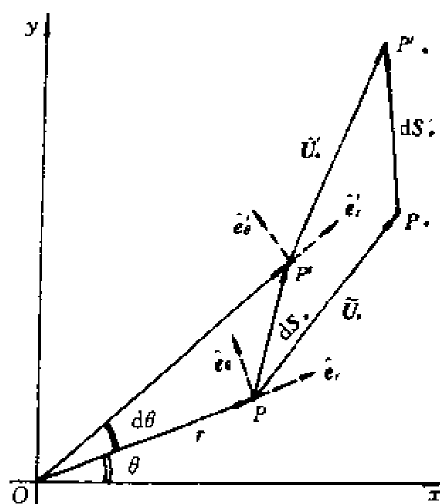
$$\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n^{\perp} + \dot{\mathbf{E}}_n \Delta t \tag{43}$$

附录 12.2　导出柱坐标系中的应变表达式

在 $t=t$ 时刻，考虑一个质点及其附近的另一质点，它们分别处于附图 12.3 所示的 Q 点和 Q' 点，而 Q 和 Q' 在 (x,y) 平面上的投影点分别为 P 和 P'.



附图 12.3



附图 12.4

现在柱坐标系 (r,θ,z) 中描述，如上诸点在该坐标系中的坐标分别为

$$\begin{cases} Q\ \text{点为}(r,\theta,z) & Q'\ \text{点为}(r',\theta',z') \\ P\ \text{点为}(r,\theta,0) & P'\ \text{点为}(r',\theta',0) \end{cases}$$

其中

$$r' = r + \mathrm{d}r,\quad \theta' = \theta + \mathrm{d}\theta,\quad z' = z + \mathrm{d}z \tag{44}$$

在 t 时刻 Q 与 Q' 间的间距矢量 $\overrightarrow{QQ'}$ 即线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为

$$\overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OQ} = \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}\boldsymbol{S}_* + \mathrm{d}z\hat{k} \tag{45}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_* = \mathrm{d}r\hat{e}_r + r\mathrm{d}\theta\hat{e}_\theta \tag{46}$$

其中 $\hat{e}_r$、$\hat{e}_\theta$、$\hat{k}$ 分别为 r 向、θ 向和 z 向的单位矢量。

到 $t=t'$ 时刻：

$$\begin{cases} \text{原处在 } Q \text{ 点的质点即 } \mathrm{d}S \text{ 的末端} \to Q_*\text{(图上未标出)，位移为 } \widetilde{U} \\ \text{原处在 } Q' \text{ 点的质点即 } \mathrm{d}S \text{ 的首端} \to Q'_*\text{(图上未标出)，位移为 } \widetilde{U}' \end{cases}$$

Q_* 和 Q_*' 在 (x,y) 平面上的投影点为 P_* 和 P_*'，$\widetilde{U}$ 和 $\widetilde{U}'$ 在 (x,y) 平面上的投影矢量为 $\widetilde{U}_*$ 和 $\widetilde{U}'_*$，见附图 12.4 所示。这些矢量之间的关系为：

$$\overrightarrow{QQ_*} = \widetilde{U} = \widetilde{U}_* + \widetilde{w}\hat{k}\quad,\quad \widetilde{U}_* = \widetilde{u}\hat{e}_r + \widetilde{v}\hat{e}_\theta \tag{47}$$

$$\overrightarrow{Q'Q'_*} = \widetilde{U}' = \widetilde{U}'_* + \widetilde{w}'\hat{k}\quad,\quad \widetilde{U}'_* = \widetilde{u}'\hat{e}'_r + \widetilde{v}'\hat{e}'_\theta \tag{48}$$

其中 $\widetilde{u}$、$\widetilde{v}$、$\widetilde{w}$ 和 $\widetilde{u}'$、$\widetilde{v}'$、$\widetilde{w}'$ 分别为径向、角向和 z 向的位移分量；$\hat{e}'_r$ 和 $\hat{e}'_\theta$ 为在 Q' 点即 P' 点

处的径向和角向的单位矢量：

$$\begin{cases}\hat{e}_r' = \cos(\mathrm{d}\theta)\hat{e}_r + \sin(\mathrm{d}\theta)\hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\theta' = -\sin(\mathrm{d}\theta)\hat{e}_r + \cos(\mathrm{d}\theta)\hat{e}_\theta\end{cases} \tag{49}$$

$$\tilde{u} = \tilde{u}(r,\theta,z) \quad , \quad \tilde{v} = \tilde{v}(r,\theta,z) \quad , \quad \tilde{w} = \tilde{w}(r,\theta,z) \tag{50}$$

$$\begin{cases}\tilde{u}' = \tilde{u}(r',\theta',z') = \tilde{u} + \mathrm{d}\tilde{u} \\ \tilde{v}' = \tilde{v}(r',\theta',z') = \tilde{v} + \mathrm{d}\tilde{v} \\ \tilde{w}' = \tilde{w}(r',\theta',z') = \tilde{w} + \mathrm{d}\tilde{w}\end{cases} \tag{51}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{u} &= \frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\tilde{v} &= \frac{\partial\tilde{v}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial z}\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\tilde{w} &= \frac{\partial\tilde{w}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{52}$$

在该时刻($t=t'$)，所考虑的两个质点间的间距矢量$\overrightarrow{Q_*Q'_*}$，即变形后的线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$，即有

$$\overrightarrow{Q_*Q_*'} = \mathrm{d}\boldsymbol{S}'$$

而

$$\begin{cases}\overrightarrow{Q_*Q'_*} = \overrightarrow{OQ'_*} - \overrightarrow{OQ_*} \\ \overrightarrow{OQ_*} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QQ_*} \\ \overrightarrow{OQ'_*} = \overrightarrow{OQ'} + \overrightarrow{Q'Q'_*}\end{cases}$$

由以上诸式以及式(45)、(47)和(48)，则推出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S}' &= (\overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OQ}) + (\overrightarrow{Q'Q'_*} - \overrightarrow{QQ_*}) \\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{S} + (\tilde{\boldsymbol{U}}'_* - \tilde{\boldsymbol{U}}_*) + (\tilde{w}' - \tilde{w})\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned} \tag{53}$$

将 $\tilde{\boldsymbol{U}}'_*$ 的分量 $\tilde{u}'$ 和 $\tilde{v}'$ 投影到 $\hat{e}_r$ 和 $\hat{e}_\theta$ 方向上去，据(51)和(52)式，则有

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{U}}'_* = &[(\tilde{u} + \mathrm{d}\tilde{u})\cos(\mathrm{d}\theta) - (\tilde{v} + \mathrm{d}\tilde{v})\sin(\mathrm{d}\theta)]\hat{e}_r \\ &+ [(\tilde{v} + \mathrm{d}\tilde{v})\cos(\mathrm{d}\theta) + (\tilde{u} + \mathrm{d}\tilde{u})\sin(\mathrm{d}\theta)]\hat{e}_\theta\end{aligned} \tag{54}$$

鉴于 $\cos(\mathrm{d}\theta)\approx 1, \sin(\mathrm{d}\theta)\approx\mathrm{d}\theta$；又据(52)式 $\mathrm{d}\tilde{u}$ 和 $\mathrm{d}\tilde{v}$ 为小量，在上式中略高级小量则有

$$\tilde{\boldsymbol{U}}'_* = (\tilde{u} + \mathrm{d}\tilde{u} - \tilde{v}\mathrm{d}\theta)\hat{e}_r + (\tilde{v} + \mathrm{d}\tilde{v} + \tilde{u}\mathrm{d}\theta)\hat{e}_\theta \tag{55}$$

于是由式(53)、(45)、(46)、(47)、(51)以及上式推出

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}' = (\mathrm{d}r + \mathrm{d}\tilde{u} - \tilde{v}\mathrm{d}\theta)\hat{e}_r + (r\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}\tilde{v} + \tilde{u}\mathrm{d}\theta)\hat{e}_\theta + (\mathrm{d}z + \mathrm{d}\tilde{w})\hat{\boldsymbol{k}} \tag{56}$$

将(52)式代进上式，再求 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$ 的平方，同时认为位移的各分量及其它们的偏导数是与 $\mathrm{d}r$、$\mathrm{d}\theta$、$\mathrm{d}z$ 的同级小量。略去 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$ 平方式中的四级小量，并减去 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的平方，则有

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}S')^2 - (\mathrm{d}S)^2 &= \mathrm{d}\boldsymbol{S}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}' - \mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \\ &= 2\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}(\mathrm{d}r)^2 + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\theta} + \frac{\tilde{u}}{r}\right)r^2(\mathrm{d}\theta)^2 + 2\frac{\partial\tilde{w}}{\partial z}(\mathrm{d}z)^2 + \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial r} - \frac{\tilde{v}}{r}\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + 2\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\theta}\right)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z +\end{aligned}$$

$$+2\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial\tilde{w}}{\partial r}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{57}$$

根据有限应变张量 $\mathbf{E}=\{\varepsilon_{ij}\}$ 的定义(参见(12.38)式):

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}S')^2-(\mathrm{d}S)^2&=\mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\\&=2\varepsilon_{rr}(\mathrm{d}r)^2+2\varepsilon_{\theta\theta}r^2(\mathrm{d}\theta)^2+2\varepsilon_{zz}(\mathrm{d}z)^2\\&\quad+4\varepsilon_{r\theta}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+4\varepsilon_{\theta z}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z+4\varepsilon_{rz}\mathrm{d}r\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{58}$$

将(57)式与(58)式对比,则推出

$$\begin{cases}\varepsilon_{rr}=\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\\ \varepsilon_{\theta\theta}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial\theta}+\dfrac{\tilde{u}}{r}\\ \varepsilon_{zz}=\dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial z}\\ \varepsilon_{r\theta}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial r}-\dfrac{\tilde{v}}{r}\right)\\ \varepsilon_{rz}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial z}+\dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial r}\right)\\ \varepsilon_{\theta z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\tilde{v}}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\tilde{w}}{\partial\theta}\right)\end{cases} \tag{59}$$

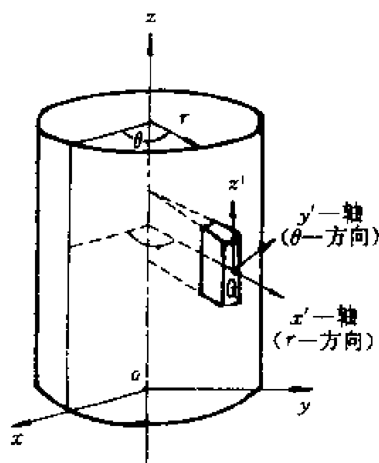
如上给出的应变表达式,是在小变形的条件下推出来的。因此,它实质上是线性有限应变,即相当习用应变。(对于在柱坐标系中的习用应变表达式,还可从其他角度出发推出它,见附图12.4)

在如上推导中,如果不略去高阶项,则可给出在柱坐标系中的有限应变表达式(因太繁,这里从略)。

当然,按如上办法亦可导出在球坐标系中的应变表达式。

附录12.3　导出柱坐标系中自然应变率的表达式

直角笛卡尔坐标系(xyz)与柱坐标系($r\theta z$)之间的关系,如附图12.5所示。



附图12.5

一、两种坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ g = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \qquad \begin{cases} \theta = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x} \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \tag{60}$$

由上式可得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r} = \cos\theta \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r} = \sin\theta \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = -\dfrac{y}{r^2} = -\dfrac{1}{r}\sin\theta \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{x}{r^2} = \dfrac{1}{r}\cos\theta \end{cases} \tag{61}$$

二、两个坐标系中速度分量之间的关系

速度$\boldsymbol{v}$在直角坐标坐标系xyz中表成

$$\boldsymbol{v} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k} = v_i\hat{e}_i \tag{62}$$

其中

$$\begin{cases} v_1 = u, \quad v_2 = v, \quad v_3 = w \quad (\text{三个坐标轴向速度分量}) \\ \hat{e}_1 = \hat{i}, \quad \hat{e}_2 = \hat{j}, \quad \hat{e}_3 = \hat{k} \quad (\text{坐标轴向单位矢量}) \end{cases}$$

在xyz坐标系中应变率张量$\dot{\mathbf{E}}$,据(12.97)式为

$$\dot{\mathbf{E}} = \{\dot{\varepsilon}_{ij}\} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{63}$$

其中　　$x_1 = x \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = z$

速度$\boldsymbol{v}$在$r\theta z$坐标系即$x'y'z'$系（见附图12.5.它为取在Q点的局部坐标系）中表成

$$\boldsymbol{v}=v_r\hat{\boldsymbol{r}}_0+v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}_0+w\hat{\boldsymbol{k}}=v'_i\hat{\boldsymbol{e}}'_i \tag{64}$$

其中

$$\begin{cases}v'_1=v_r \quad , \quad v'_2=v_\theta \quad , \quad v'_3=w & \text{（为径向、角向和 } z \text{ 向分量）}\\ \hat{\boldsymbol{e}}'_1=\hat{\boldsymbol{r}}_0 \quad , \quad \hat{\boldsymbol{e}}'_2=\hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \quad , \quad \hat{\boldsymbol{e}}'_3=\hat{\boldsymbol{k}} & \text{（为径向、角向和 } z \text{ 向单位矢量）}\end{cases}$$

两坐标系中轴向单位矢量的关系

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{e}}'_1=\hat{\boldsymbol{r}}_0=\cos\theta\hat{\boldsymbol{i}}+\sin\theta\hat{\boldsymbol{j}}\\ \hat{\boldsymbol{e}}'_2=\hat{\boldsymbol{\theta}}_0=-\sin\theta\hat{\boldsymbol{i}}+\cos\theta\hat{\boldsymbol{j}}\end{cases}, \quad \hat{\boldsymbol{e}}'_3=\hat{\boldsymbol{k}} \tag{65}$$

在两个坐标系中速度分量之间的关系

$$\begin{cases}v_1=u=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta=v_1'\cos\theta-v_2'\sin\theta\\ v_2=v=v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta=v_1'\sin\theta+v_2'\cos\theta\\ v_3=w=v'_3\end{cases} \tag{66}$$

利用上式和(61)式，可求得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}=\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\\ \quad=\dfrac{\partial}{\partial r}(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial\theta}(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\\ \quad=\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\sin\theta\right)\cos\theta+(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)\dfrac{\sin\theta}{r}\\ \quad\quad-\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}\cos\theta-\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\sin\theta\right)\dfrac{\sin\theta}{r}\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)\\ \quad=\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial r}\sin\theta+\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\cos\theta\right)\cos\theta-(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\dfrac{\sin\theta}{r}\\ \quad\quad-\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}\sin\theta+\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\cos\theta\right)\dfrac{\sin\theta}{r}\\ \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}=\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{\partial w}{\partial\theta}\dfrac{\sin\theta}{r}\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)\\ \quad=\dfrac{\partial}{\partial r}(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial}{\partial\theta}(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial y}\\ \quad=\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial r}\sin\theta+\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\cos\theta\right)\mathrm{sos}\theta+(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\dfrac{\cos\theta}{r}\\ \quad\quad+\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta}\sin\theta+\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}\cos\theta\right)\dfrac{\cos\theta}{r}\\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)\\ \quad=\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}\sin\theta\right)\sin\theta-(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)\dfrac{\cos\theta}{r}\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\qquad\qquad + \left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}\cos\theta - \dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\sin\theta\right)\dfrac{\cos\theta}{r} \\
\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} = \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\partial w}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{r} \\
\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} = \dfrac{\partial v}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} = \dfrac{\partial w}{\partial z}
\end{cases}
\tag{67}
$$

三、在 $r\theta z$ 坐标系中的应变率张量

根据式(65)，可以给出从 xyz 系到 $x'y'z'$（即 $r\theta z$）系的变换系数张量

$$
\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{68}
$$

则从 xyz 系的应变率张量 $\dot{\mathbf{E}}$ 变换成 $r\theta z$ 系的应变率张量 $\dot{\mathbf{E}}'$ 为

$$
\dot{\mathbf{E}}' = \{\dot{\varepsilon}_{ij}\} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{rr} & \dot{\varepsilon}_{r\theta} & \dot{\varepsilon}_{rz} \\ \dot{\varepsilon}_{r\theta} & \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} & \dot{\varepsilon}_{\theta z} \\ \dot{\varepsilon}_{rz} & \dot{\varepsilon}_{\theta z} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix}
$$

$$
= \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{A}_c
$$

$$
= \{a_{ik}a_{jl}\dot{\varepsilon}_{kl}\}
$$

再利用(68)、(63)和(67)式，便由上式求得

$$
\begin{cases}
\dot{\varepsilon}_{rr} = \dfrac{\partial v_r}{\partial r} \\
\dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \dfrac{v_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\
\dot{\varepsilon}_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} - \dfrac{v_\theta}{r}\right) \\
\dot{\varepsilon}_{rz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial v_r}{\partial z}\right) \\
\dot{\varepsilon}_{\theta z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) \\
\dot{\varepsilon}_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}
\end{cases}
\tag{69}
$$

这就是在柱坐标系中自然应变率的表达式。

同样按此方法，可以求出在球坐标系以及任意正交曲线坐标系中的应变率的表达式。

附录12.4　导出柱坐标系中习用应变的表达式

一、按附录12.3中的方法

由(12.54.1)可知，习用应变$\mathbf{E}^{\blacktriangle}$在直角笛卡尔坐标系中为

$$\mathbf{E}^{\blacktriangle}=\{E_{ij}^{\blacktriangle}\}=\{\varepsilon_{ij}\}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial X_j}+\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial X_i}\right)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

上式与(63)式在形式完全类同，若将$\tilde{u}_i$看成v_i，则同上面完全一样，于是按照如上的同样办法便可求得在柱坐标系的习用应变表达式为：

$$\left\{\begin{aligned}
E_{rr}^{\blacktriangle}&=\varepsilon_{rr}=\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial r}\\
E_{\theta\theta}^{\blacktriangle}&=\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{\tilde{u}_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}\\
E_{r\theta}^{\blacktriangle}&=\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\theta}+\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial r}-\frac{\tilde{u}_\theta}{r}\right)\\
E_{rz}^{\blacktriangle}&=\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial r}+\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial z}\right)\\
E_{\theta z}^{\blacktriangle}&=\varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\theta}+\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial z}\right)\\
E_{zz}^{\blacktriangle}&=\varepsilon_{zz}=\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial z}
\end{aligned}\right.\tag{70}$$

其中$\tilde{u}_r$、$\tilde{u}_\theta$、$\tilde{u}_z$分别为位移的径向、角向和z向的分量。上式就是习用应变在柱坐标系中的表达式，它同在附录12.2中给出的表达式(59)完全一致。

同样，按上述方法，亦可导出习用应变在球坐标系和任意正交曲线坐标系中的表达式。

二、按几何方法

习用应变，它为小应变(即无限小变形)，导出它在柱坐标系中的表达式，可以采用几何方法。附图12.6给出了一个微元体在径向、角向和z向的变形作图。

从图之(a)看出，原长度为$r\mathrm{d}\theta$的元素$\overset{\frown}{ab}$移到$\overset{\frown}{a'b'}$，长度成为$(r+\tilde{u}_r)\mathrm{d}\theta$. 因面由此引起的角向(切向)应变部分为

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}=\frac{(r+\tilde{u}_r)\mathrm{d}\theta-r\mathrm{d}\theta}{r\mathrm{d}\theta}=\frac{\tilde{u}_r}{r}$$

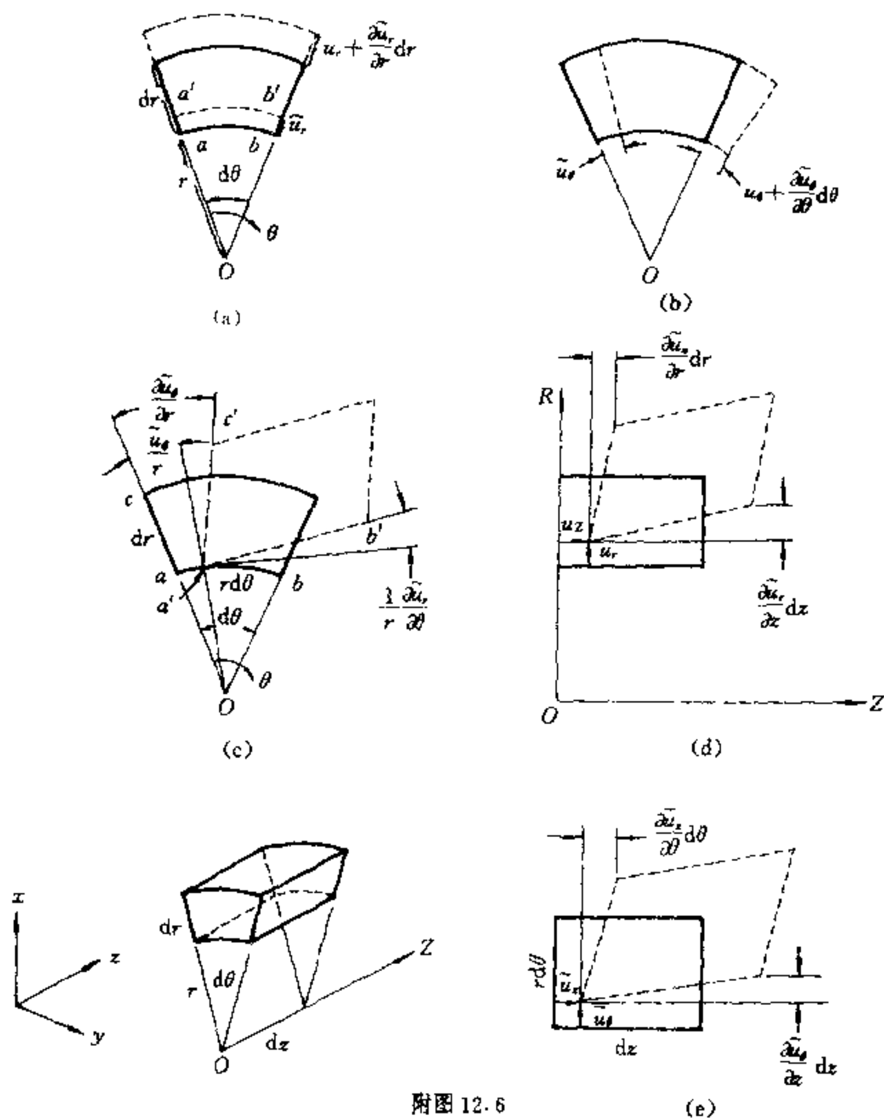
另一方面，从图之(b)看出，角向位移$\tilde{u}_\theta$之变化所引起角向应变之增量为

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}=\frac{\tilde{u}_\theta-\dfrac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta-\tilde{u}_\theta}{r\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}$$

由如上两式便得到角向总应变

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}+\varepsilon_{\theta\theta}^{(2)}=\frac{\tilde{u}_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial\theta}$$

剪应变$\varepsilon_{r\theta}$等于图之(c)所示的角改变量的一半，即



附图 12.6

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}(\angle c'a'b'-\angle cab)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial\theta}+\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial r}-\frac{\tilde{u}_\theta}{r}\right)$$

上式中的第一项来自径向位移在角向的变化；第二项来自角向位移在径向的变化；最后一项的出现是由于线元$\overline{a'c'}$斜率的改变，而这种改变是来自它绕通过O点轴的刚体旋转。

参照图之(d)和(e)，可以推出

$$\varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}\theta}{r\mathrm{d}\theta}+\frac{\left(\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial z}\right)\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial\theta}+\frac{\partial\tilde{u}_\theta}{\partial z}\right]$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left[\frac{(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z})\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} + \frac{(\frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r})\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial r}\right]$$

至于 z 向正应变分量当然同直角笛卡尔坐标系中的一样，即

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial z}$$

附表12.1　单位物质(元素)的物性常数

物　质	密度 ρ_0(t/m³)	体积弹性模量 K(GPa)	线胀系数 $\alpha_0(10^{-6}/K)$	点阵比热 C_v(J/mol·K)	Debye温度 Θ_D(K)	熔　点 T_m(K)
3 Li	0.533	12.1	45	22.34	352±17	453.69
4 Be	1.843	111.0	11.5	14.64	1160	1527
5 B	2.464	182[a]	8.3	10.54	1315	2498±75[a]
6 C(g)石墨	2.283	34.47[a]	3.8±3.1	8.62	402±11	4100[a]
C(d)金刚石	3.536	556.0[a]	1.19±0.01	6.02	2240±5	
11 Na	0.966	6.74	70.6±0.6	25.65	157±1	370.98
12 Mg	1.736	35.4	25.7±0.7	23.51	396±54	922
13 Al	2.698	76	23.1±0.5	22.93	423±5	933.2
14 Si	2.327	97.9	3.07±0.07	19.33	647±11	1685
15 P(w)白磷	2.219	4.78[a]	124.5±0.5	20.84	193	317.2±0.2[a]
P(r)红磷	2.350	19.56[a]	66.5	17.82	325	
P(b)黑磷	2.691	31.03[a]				
16 S(r)正交晶硫	1.841	18.2[a]	64.1±0.1	19.20	250	
19 K	0.857	3.3	83.0	26.28	89.4±0.5	336.4
20 Ca	1.530	16.7	22.4±0.1	24.94	234.0±5	1112
21 Sc	2.985	55.1	10.0	22.05	470±80	1608
22 Ti	3.988	107	8.35±0.15	23.77	426±5	1167
23 V	6.090	157	8.3	21.76	326±54	2175
24 Cr	7.191	162	8.4	22.59	598±32	2130
25 Mn	7.467	92.6	22.6±0.3	23.18	418±32	980
26 Fe	7.871	166	11.7	23.10	457.12	1809
27 Co	8.810	190	12.4	22.97	452±17	1768
28 Ni	8.903	183	12.7±0.2	23.35	427±14	1726
29 Cu	8.932	137	16.7±0.3	23.64	342±2	1356.5
30 Zn	7.134	68.3	29.7	23.89	316±2	692.65
31 Ga	5.903	58.2	18.1±0.2	25.10	317	302.9
32 Ge	5.315	75.2	5.75	22.80	318±22	1210.4
33 As	5.781	63.2	4.28±0.42	24.60	236	885
34 Se	4.802	9.276[a]	36.9±0.1	24.85	151.7±0.4	490[a]
37 Rb	1.524	2.3	88.1±1.9	26.36	54±4	312
38 Sr	2.582	11.6	20	24.85	147±1	1043
39 Y	4.472	41.5	12.0	23.22	268±32	1752
40 Zr	6.506	95.3	5.78±0.07	24.64	289±24	1136
41 Nb	8.579	171	7.07±0.05	22.43	241±13	2740
42 Mo	10.221	263	4.98±0.15	23.05	459±11	2890
43 Tc	11.349	303[a]	8.06	22.59	351	2443±30[a]
44 Ru	12.350	311	9.36±0.27	22.68	600	2700
45 Rh	12.410	287	8.4±0.1	23.30	480±32	2233
46 Pd	11.983	193	11.5±04	22.43	283±16	1825
47 Ag	10.503	103	19.2±0.4	24.27	228±3	1234
48 Cd	8.647	52.9	30.6±1.3	24.27	252±48	294.18
49 In	7.299	42.0	31.4±1.4	24.52	108±0.3	429.76
50 Sn(w)白锡	7.276	55.4	21.2	24.77	169±9	505.06

物　质		密度 $\rho_0(t/m^3)$	体积弹性模量 K(GPa)	线胀系数 $\alpha_0(10^{-6}/K)$	点阵比热 C_v(J/mol·K)	Debye 温度 θ_D(K)	熔　点 T_m(K)
51	Sb	6.683	41.4	10.9	25.02	150	904
52	Te	6.237	23.6	16.77±0.03	25.36	141±12	722.95
55	Cs	1.921	2.01	97	27.41	40±5	301.8
56	Ba	3.606	9.57	18.8±0.8	25.19	110±1.8	1002
57	La	6.163	26.8	10.4	22.97	142±3	1134
58	Ce(r)	6.772	24.41*	8.5	24.85	146	999
59	Pr	6.768	28.8	6.79	20.38	85±1	1068
60	Nd	7.003	32.9	9.98	24.60	159	1128
61	Pm	7.231	36*	9.0	24.06	158	1308*
62	Sm	7.539	36.2	10.4	25.77	116	1190
63	Eu	5.244	17.0	33.1	25.02	127	1090
64	Gd	7.884	37.8	8.28	33.35	170	1533
65	Tb	8.252	38.7	10.3	26.02	150	1560
66	Dy	8.557	40.8	10.0	25.15	172±35	1657
67	Ho	8.796	40.8	10.7	19.20	114±7	1701
68	Er	9.057	45.5	12.3	23.93	134±10	1795
69	Tm	9.318	46.2	13.3	20.79	127±1	1818
70	Yb	6.956	14.9	24.96±0.04	24.35	118	1033
71	Lu	9.846	47.6	8.12	23.85	210	1936
72	Hf	13.264	109	6.01±0.16	24.69	256±5	2013
73	Ta	16.754	193	6.55±0.05	23.39	247±13	3250
74	W	19.244	310	4.59±0.03	23.89	388±17	3653
75	Ke	21.017	365	6.63±0.06	24.60	429±22	3453
76	Os	22.533	420	4.7±0.1	24.64	500	3323
77	Ir	22.548	363	6.63±0.12	24.23	425±5	2716
78	Pt	21.443	283	8.95±0.05	23.35	234±1	2043
79	Au	19.273	173	14.1±0.1	24.23	165±1	1336
80	Hg	14.230	28.8*	61	24.31	～75	234.28
81	Tl	11.864	35.7	29.4±10	24.06	88±1	577
82	Pb	11.341	44.7	29.0±0.3	24.02	102±6	600.45
83	Bi	9.797	33.6	13.41±0.09	25.61	119±2	544.52
84	Po	9.277	27*	23.0±1.5	25.48	81	519*
87	Fr	3.055	2*	102	26.57	39	297*
88	Ra	5.826	13.5*	20.2	25.69	89	973*
89	Ac	10.062	25	14.9	24.02	124	1323±50
90	Th	11.725	57.7	11.2±0.4	15.56	170	1636
91	Pa	15.372	78*	7.3	26.15	159	1698*
92	U	18k.087	113	12.6±0.4	23.72	200	941
93	Np	18.081	69.4*	27.5	24.56	121	910±2*
94	Pu	19.818	54.6*	55	15.77	171	913±1*

附表 12.2　密实介质的雨贡纽参数

介　　质	ρ_{m0}(g/cm³)	a_{m0}(mm/μs)	g(m/μs)	h	压力范围(Mbar)
2024 铝(Al/Cu/Mg/Mn,93.4/4.5/1.5/0.6)	2.785	5.33	5.328	1.338	~1.20
921—T 铝(Al/Cu/Si/92.0/3.5/2.0/1.5)	2.833	5.04	5.041	1.420	~1.20
铜(Cu)	8.930	3.94	3.91	1.489	~2.40
铁(Fe)或 1018 钢	7.850	3.570	3.574	1.920	~2.70
铀钼合金(U/Mo97/3)	18.450	2.56	2.565	1.531	~3.50
铍(Be)	1.851	8.00	7.998	1.124	~0.90
镁(Mg)	1.740	4.49	4.492	1.263	~0.80
Az31B(Mg/Al/Zn/Mn95.8/3/1/0.2)	1.780	4.52	4.522	1.242	~0.70
钛(Ti)	4.528	5.22	5.220	0.767	~1.06
锆(Zr)	6.505	3.76	3.757	1.018	~0.40
铪(Hf)	12.885	2.950	2.954	1.121	~0.60
钒(V)	6.100	5.08	5.077	1.201	
铌(Nb)	8.586	4.44	4.438	1.207	~1.80
钽(Ta)	16.654	3.41	3.414	1.200	~2.30
铬(Cr)	7.117	5.17	5.173	1.473	~1.40
钼(Mo)	10.206	5.12	5.124	1.233	~2.10
钨(W)	19.224	4.03	4.029	1.237	~2.70
铼(Re)	21.020	4.18	4.184	1.367	~2.80
铑(Rh)	12.428	4.81	4.807	1.376	~1.90
钯(Pd)	11.991	3.95	3.948	1.588	~2.10
铱(Ir)	22.484	3.92	3.916	1.457	~3.00
铂(Pt)	21.419	3.60	3.598	1.544	~2.70
碳化硅	3.12	8.00	8.00	0.95	~1.10
碳化钨	15.020	4.92	4.92	1.339	~2.00
304 不锈钢(Fe/Cr/Ni/Mn/Si/C68/19/10/2/1/0.08)	7.896	4.57	4.567	1.490	~1.90
RTV—521 硅橡胶	1.372	0.22	0.218	2.694	~0.55
商用氯丁橡胶	1.439	2.78	2.785	1.419	~0.18
聚橡胶(高密度)	1.010	0.85	0.852	1.865	~0.14
(低密度)	0.77	0.87	0.875	1.432	~0.10
聚乙烯(低密度)	0.915	2.90	2.901	1.481	~0.50
聚氨酯(CPR1009-78)	1.265	2.49	2.486	1.577	~0.10
聚苯乙烯	1.044	2.75	2.746	1.319	~0.14
鲁赛特有机玻璃(丙烯酸树脂)	1.181	2.26	2.260	1.816	~0.25
普莱克斯有机玻璃(丙烯酸树脂)	1.185	2.57	2.572	1.536	~0.60

介　　质	ρ_{m0}(g/cm³)	a_{m0}(mm/μs)	g(m/μs)	h	压力范围(Mbar)
石脂	0.90	2.96	2.960	1.531	~0.55
环氧塑料(828EPDN/乙二胺 100/14)	1.198	2.68	2.678	1.520	~0.20
聚氯乙烯(EPON)	1.681	1.95	1.952	1.660	~0.20
酚醛树脂塑料	1.370	2.85	2.817	1.404	~0.65
苯氧基塑料(PheNoxy)	1.178	2.27	2.266	1.698	~0.26
耐火酚醛塑料	1.644	3.02	3.016	1.005	~1.20
硼酸锂环氧塑料(焦硼酸锂 90/环氧树脂 10)	2.178	4.05	4.052	1.486	~0.75
环氧铜塑料(CuO44/Epoxy56)	1.710	2.11	2.110	1.767	~0.70
迈尔马斯(MelMac)	1.452	3.50	3.505	1.213	~0.18
聚四氟乙烯	2.147	1.68	1.682	1.819	~0.22
米卡塔塑料(Micarta)	1.391	3.05	3.048	1.422	~0.70
聚酯玻璃(匹兹堡板玻璃)	1.217	2.72	2.7222	1.333	~0.60

其中 a_{m0} 为介质的初始音速

附表 12.3　一些非金属及部分金属和合金的雨贡纽参数

介　　质	ρ_{m0}(g/cm³)	a_{m0}(mm/μs)	h	压力范围(Mbar)
非金属固体介质				
碳(C)	1.7~2.2	0.24	2.38	<0.215
		0.816	0.576	>0.215
碘(I)	4.93	1.35	1.70	0.05~1.100
硫(S)	2.1	2.2	1.0	0.06~0.20
		2.2	0.8	
CsBr	4.43	3.1	0.3	0.146~0.328
CsCl	3.95	2.2	0.5	0.06~0.318
KCl	1.98	1.8	1.8	0.04~0.229
KF	2.49	2.4	1.6	0.117~0.266
KI	3.1	1.8	1.4	0.110~0.278
LiBr	3.30	2.6	1.4	0.136~0.300
LiCl	2.05	4.1	1.5	0.121~0.263
LiF	2.62	5.0	1.6	0.155~0.331
LiI	4.01	2.8	0.9	0.205~0.320
NaBr	3.16	2.6	1.3	0.058~0.305
NaCl	2.15	3.4	1.37	0.052~0.791
NaI	3.64	2.0	1.6	0.134~0.312
RbBr	3.30	1.4	1.6	0.112~0.286
RbCl	2.70	1.5	1.6	0.109~0.258
RbI	3.50	1.4	1.5	0.117~0.279
$BaTiO_3$	5.72	3.51	1.69	0.01~1.000

[续]

介　　质	ρ_{m0}(g/cm^3)	a_{m0}(mm/μs)	h	压力范围(Mbar)
干冰	1.54	2.16	1.46	0.053～0.631
砂子	1.65	1.30	1.35	0.007～0.120
PMMA	1.18	2.74	1.35	0.017～2.000
大理石	2.70	4.00	1.32	～0.130
花岗岩	2.63	2.10	1.63	～0.40
石灰石	2.60	3.50	1.43	～0.16
国产有机玻璃棒	1.84	2.87	1.88	～0.100
Pb(Zr0.52-Ti0.45)O_3	7.58	1.63	3.50	0.02～4.930
混凝土	1.16	2.336	1.318	～0.56
水(H_2O)	1.0	1.70	1.70	～1.140
乙醇(C_2H_5OH)	0.79	1.60	1.60	0.046～0.110
四氯化碳(CCl_4)	1.60	1.50	1.50	0.074～0.171
甲苯($CH_3C_6H_5$)	0.88	1.80	1.60	0.052～0.122
甘油	1.25	2.40	1.60	0.076～0.170
甲醇	0.80	1.80	1.50	0.047～0.110
液态氮	0.808	1.60	1.40	0.0296～0.404
n-戊醇	0.81	2.0	1.50	0.05～0.116
乙醚	0.70	1.70	1.50	0.041～0.860
CS_2	1.26	2.0	0.90	0.059～0.130
癸烷	0.68	1.90	1.40	0.041～0.860
硝基甲苯	1.17	2.20	1.30	0.065～0.152
丙酮	0.80	1.90	1.40	0.046～0.106
部分金属元素和合金				
汞(Hg)	13.55	1.450	2.20	0.20～1.41
铅(Pb)	11.34	2.028	1.517	1.0～4.25

附表 12.4　金属的雨贡纽参数

介　　质	ρ_{m0}(g/cm^3)	a_{m0}(mm/μs)	h	压力范围(Mbar)
银(Ag)	10.49	3.300	1.54	0.22～1.56
	10.49	3.243	1.589	0.252～1.20
锑(Sb)	6.69	2.000	1.60	0.218～1.55
铊(Te)	11.84	1.859	1.515	0.277～0.557
钍(Th)	11.68	2.132	1.278	
锌(Zn)	7.14	3.2	1.45	0.35～3.30
锡(Sn)	7.28	2.640	1.476	0.175～1.40
镉(Cd)	8.64	2.65	1.48	0.36～3.50
	8.64	2.443	1.671	0.218～0.138
铟(In)	7.27	3.27	1.61	0.218～0.414
铋(Bi)	9.8	2.00	1.34	0.35～3.50
钴(Co)	8.82	4.748	1.33	0.246～1.64
金(Au)	19.3	3.15	1.47	0.590～5.20
钾(K)	0.86	2.000	1.172	0.033～0.860
钠(Na)	0.97	2.55	1.262	<0.970
锂(Li)	0.53	4.45	1.115	0.06～0.400
黄铜	8.41	3.80	1.42	0.224～1.80
伍德合金	9.7	2.31	1.03	0.15～0.40

习题

12.1 常用的屈服准则有几个？它们分别是……。导出这些准则在 π 平面上的表达式，并作图。

12.2 指出几种典型的塑性本构关系，并说明它们的适用范围。

12.3 证明在小变形的情况下（即位移梯度的各分量为无穷小量）有下式成立

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial X_i}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)$$

12.4 写出有限应变、习用应变、自然应增量、应变率的表达式。

12.5 证明应变张量的第二不变量 θ_2 可以写成

$$\theta_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

12.6 对于连续介质体的均匀有限变形的位移由 $\tilde{u}_i = A_{ij}X_j$ 给出，其中 $A_{ij} = \text{const}$，确定体积变化率 θ_2 的表达式。

如果 A_{ij} 很小，θ_0 可以化成何种形式？

12.7 线性小变形（即发生的为习用应变）的位移，由下式给出

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \tilde{u}_2 = x_1 + 7x_2 \\ \tilde{u}_3 = -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

试确定应变的主值和主方向。

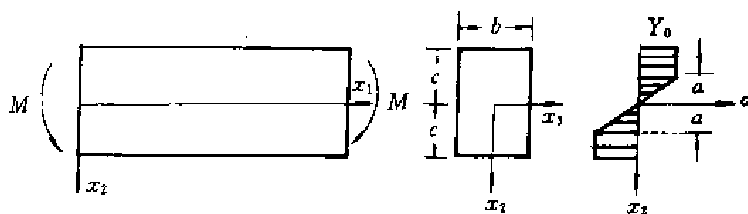
12.8 对于在体力 b_i 和面力 $t_i^{(n)}$ 作用下处于平衡的弹性体，证明总应变能

$$\mathscr{W} = \int_{V_0} \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V.$$

等于外力做功的一半

12.9 利用上式的结果，证明对于线弹性体的弹性静力学解是唯一的。

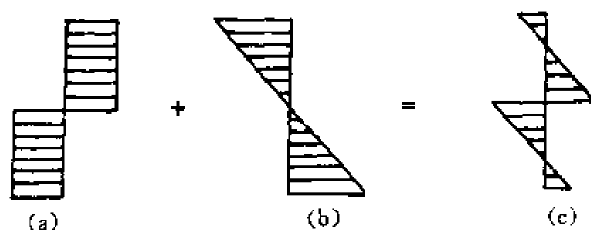
12.10 一个弱性一理想塑性的矩形梁（elastic-perfectly plastic rectangular beam）受纯剪的不弯载荷（两端加上弯矩 M，如图示）。利用荷支梁理论（simple beam theory），确定端如弯矩 M，假定梁的弹性区为[$-a, a$]，见图示，梁的宽义为 b、厚度为 $2c$.



题12.10

（提示：梁的弯曲按曲率半径很大的圆弧，中性线 x_1 轴长短不变，但中性线以上梁的纤维在 x_1 向受拉，之下的纤维 x_1 向受压。）

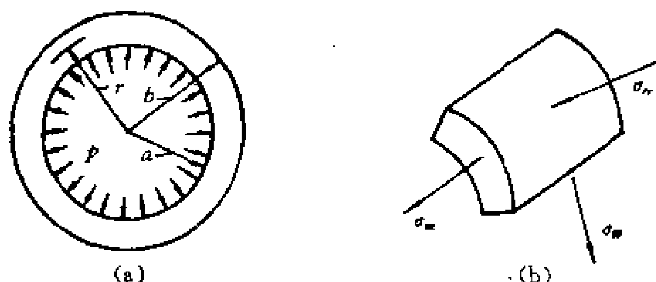
12.11 对于上题所述的梁，若弯曲到中性线 x_1 的上下均达到屈服应力 Y_0（这是一种理想的极限情况），在垂直 x_1 截面的应力如图(a)所示，然后完全去掉所加的弯矩 M，确定卸载后在垂直 x_1 截面上的应力（即残余应力 residual stress）分布。



题 12.11

（提示：所谓卸载就是要消除（即相当减去）在垂直 x_1 轴的截面上所分布的应力．但由于这要“减去”的应力所产生的力矩要等原加上的力矩，故这个减去的应力即弹性恢复力为图(b)所示意，图(c)为消除的结果——残余应力。）

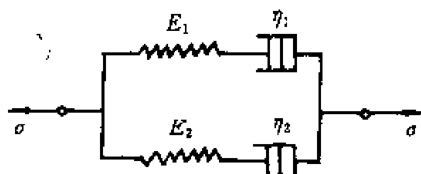
12.12　一个厚壁的圆管（相当炮管），内部承受压力 p，外部自由，如图(a)所示。① 管子很长、两端自由，试按密赛斯屈服准则，确定管壁首先达到屈服时的内压力 p 值。



题 12.12

② 假定管子两端封闭，试分别按密赛斯屈服准则和屈斯卡屈服准则，确定管壁首先达到屈服时的内压力 p 的值。

12.13　有一个特殊形式的广义麦克斯威粘弹模型如图所示，试确定该模型所对应的应力应变关系式。



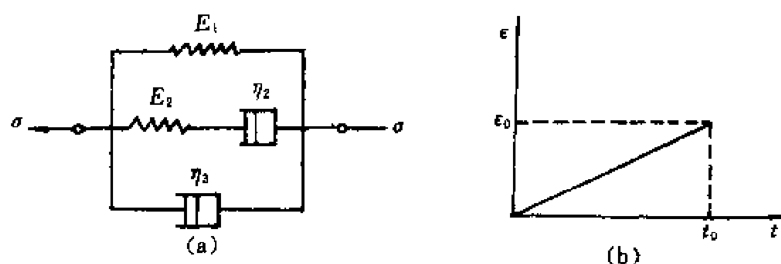
题 12.13

12.14　一个如图(a)所示的特殊粘弹模型，以常应变率 $\dot{\varepsilon}=\varepsilon_0/t_0=\text{const}$ 拉伸，如图(b)所示的拉伸，试确定在此应变加载下的应力。

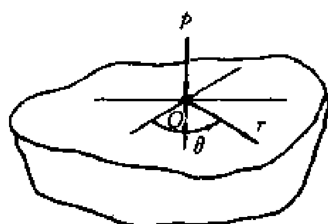
12.15　对一个弹性半无穷空间体，在原点 O 处作用一个集中载荷 P，如图所示，其径向应力为

$$\sigma_{rr}=(p/2\pi)[(1-2\nu)\alpha(r,z)-\beta(r,z)]$$

其中 α 和 β 是已知函数。



题 12.14



题 12.15

如果该弹性体为开尔文粘弹半无穷空间体，在 $P = p_0[\Omega(t)]$ 作用下，试按对应法则确定径向应力 σ_{rr}。

参考文献

[1] Mase G E. Continuum Mechanics. McGraw-Hill Book Company, 1970

[2] 王仁．弹性力学讲义．北京大学，1963

[3] Wilkins M L. Calculation of Elastic-Plastic Flow. Methods in Computational Physics 1964.(3)

[4] 吕洪生．弹塑性流动的数值计算．国防科技大学，1977

[5] 蒋泳秋等．塑性力学基础．北京：机械工业出版社，1981

[6] 王礼立．应力波基础．北京：国防工业出版社，1985

[8] 杨桂通．弹性力学．北京：人民教育出版社，1980

[9] Kransky V. J. Giroux E. D. and Long. G. A. Parallel Implementation of a Two-Dimensional Method. UCRL—74894(1973)

[10] Girowx. E. D. Implementation of the Large Mathematcal Model HEMP on the Star—100 Computers. UCRL—52277(1977)

[11] Girowx. E. D. HEMP Users Manual UCRL—51079(1973)

[12] 王礼立，余同希，李永池．冲击动力学进展．合肥：中国科技大学出版社，1992

[13] Bai Y L, Res Mechanica, 1990, 31: 133

第十三章　应力波理论基础

应力波理论是描述材料在爆炸与冲击作用下响应的最佳手段之一。在当今的各种武器研制、地下核爆、反防突防、工程爆破、爆炸加工、地震预报、地质探矿等，以及高应变率下材料本构研究中，应力波都具有举足轻重的地位。随着科学技术的发展，它将显得越来越重要。

13.1　强脉冲载荷与应力波

在前一章所研究的动载固体处理方法中，除了流体弹塑性和高压下的固体模型之外，都是对于中等强度以下的动载，因为在所述的方法中均只考虑了部分的时效。然而实际问题中，特别是对于爆炸与冲击所涉及的却多为瞬时强脉冲载荷(intensive impulse loading)，即强动载。显然，以前的办法不能解决问题，除非按流体弹塑性模型等进行数值解。

所谓动载，就是随时间变化的载荷；而强动载，即强脉冲载荷，则是峰值高而变化急剧的载荷。强动载的造成的现象与静载或准静载所造成的现象截然不同。

13.1.1　强动载造成的现象与静载(准静载)造成的现象对比

为了打破传统观念，更好地理解动载(指强动载)造成的现象与静载(准静载)造成的现象的天渊之别，现举若干例子。

1. 对于一块危立在地面的靶板受载

有一块危立在地面上的靶板，见图13.1。若子弹射来，则弹丸穿靶而过，靶板不倒。子弹打靶为动载过程。

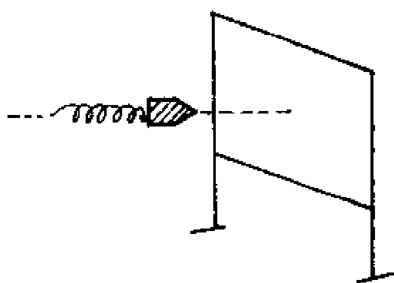


图13.1

如若用木棍去轻轻地捅靶板，靶板翻倒，而不会出孔洞。本棍轻捅为静载或准静载过程。

2. 对于星形截面筒或有槽截面筒的内部受载

图13.2(a)和(c)分别为一个星形截面的筒和一个外带槽的筒。若将筒内分别装上炸药，爆炸结果筒壁产生了破裂，破坏后呈图13.2(b)和(d)所示。爆炸作用为动载过程。

若将图示的这两个筒内充高压液体，使它们胀破，其破裂之处显然要发生在筒壁的最薄弱处如$\overline{AA}$一线，而不会像爆炸那样发生在如$\overline{BB}$一线。胀破过程为静载或准静载过程。

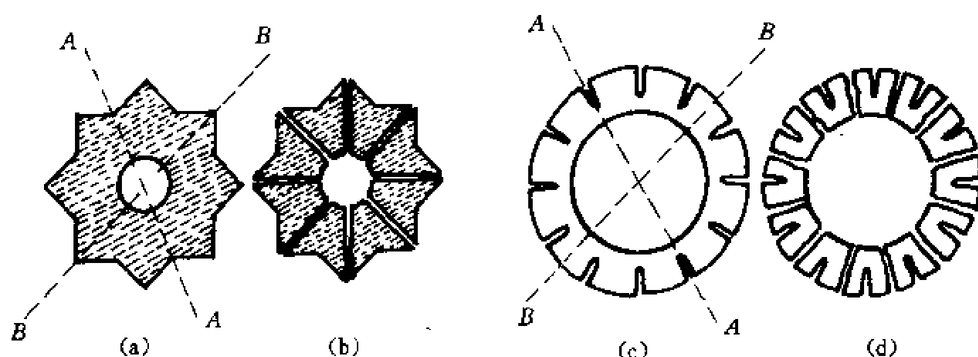


图 13.2

3. 对于钢柱端部受载

有一立在刚性地面上的钢柱，如图 13.3(a)所示。若对钢柱上端多次锤击，其上端变成蘑菇顶状，如图 13.3(b)所示。锤击为动载过程。

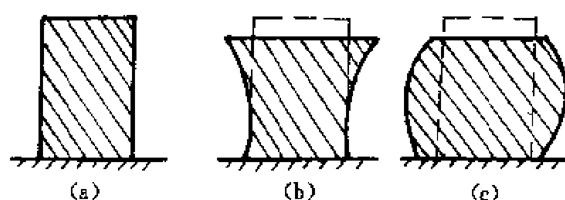


图 13.3

如若对钢柱上端改为静压，压缩结果，钢柱呈鼓状，如图 13.3(c)所示。静压当然属于静载或准静载过程。

4. 对于高压导线接头的压接

图 13.4(a)为一高压导线接头，该接头外包炸药，爆炸结果将铝管紧紧箍压在导线上，在铝管的端部$\overline{AA}$和$\overline{BB}$一线发生了颈缩，如图 13.4(b)所示。爆炸压接是个动载过程。

如果不用炸药而改用传统的液压(假若液压部分同装药部位一样)，变形结果呈图 13.4(c)所示，在铝管两端无颈缩出现。液压属于静载或准静载过程。

5. 冲拉钢丝

1872 年霍普金森(J. Hopkinson)做了一个著名的实验，该实验开创了动载研究之先河。这个实验是这样：一段悬挂的钢丝，A 端与 B 端焊接完全相同，中间套了一个落重，落重从一定的高度落下冲到下端 B 处，如图 13.5 所示。他经过多次实验，钢丝均断在 A 处。冲拉钢丝属于动载过程。

如若改为在钢丝的 B 端静拉，钢丝断点则是随机的没有规律。静拉当然是静载或准静载过程。

当然还可以举出若干例子，从以上的这些典型的例子看出，动载所造成的现象与静载完全不同，突破了我们的传统观念。当然这些现象亦不是按传统的理论所能解释的，然而应力波理论却能很好解释它们。

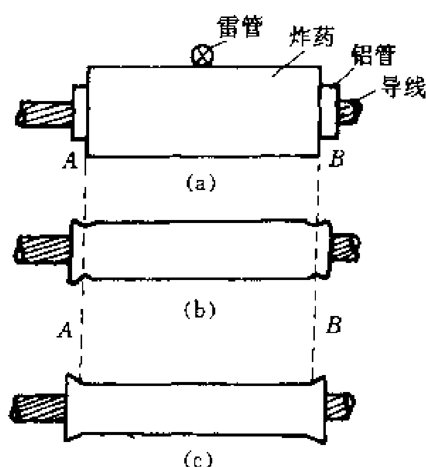


图 13.4

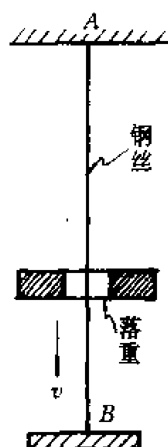


图 13.5

13.1.2 强动载的特点

1. 短历程

强脉冲载荷的作用时间极短，一般在毫秒(ms)、微秒(μs)，甚至毫微秒(ns)的时间量级上物理量就发生了极显著的变化。例如，在核弹爆炸中心，压力可在几微秒内突然上升到 $10^7 \sim 10^8$ 巴的量级；炸药在物体表面接触爆炸，其压力也可在几微秒内突然上升到 10^5 巴的量级；子弹以 $10^2 \sim 10^3$m/s 的速度射到靶板上时，其载荷总历时约几十微秒，可着弹点的压力却可高达 $10^4 \sim 10^5$ 巴的量级……。总之加载时间极短、变化急剧。

鉴于脉冲载荷短历程这种特点，在描述介质在这样的载荷作用下的行为时，必须考虑整个惯性(inertia)，而不能像在动载固体力学中某些做法那样只考虑部分的时效。

2. 本构方程与应变率相关

由于强动载荷的短历程，载荷急剧变化，引起应变等迅速变化，即出现了高应变率，如应变率可达 $10^2 \sim 10^4$ 秒$^{-1}$，甚至可达到 10^7 秒$^{-1}$的量级；而常规实验的应变率一般在 $10^{-5} \sim 10^{-1}$秒$^{-1}$的量级。由于应变率高，所以在本构方程中要考虑应变率，像粘弹、粘塑本构方程那样。

然而，在一般的应力波理论中，往往较多使用应变率无关的本构，如在一维应力中使用：$\sigma = \sigma(\varepsilon)$ 的关系式，本书亦是如此。之所以这样做，是因为：①为了在数学上方便分析；②尽管应变率高，可是对某些材料，应变率仍不敏感，在本构关系中应变率效应可略；③对某些材料虽应变率敏感，可是本构关系仍可用 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ 近似代替，但这时 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ 已不再是静载时的关系，而是计及一定程度的应变率效应的本构关系。当然在应力波理论中亦研究其本构与应变率相关的情况，但是没有像研究应变率无关情况那样方便透彻。

随着应变率的提高，材料的屈服极限和断裂强度都将提高，而延伸率下降。

3. 过程绝热

由于强动载过程的短历程，热传导来不及，所以可视过程为绝热。

13.1.3 应力波理论具有广泛的应用价值

由于应力波是处理脉冲载荷下固体材料响应的最佳手段之一，所以近四五十年来它

越来越受到人们的重视，得到迅猛的发展，其用途也越来越广泛。

1. 在工程技术上

应力波用于地震预报和测量、工程爆破（如开矿、探油、修路筑坝等等）、爆炸加工(explosive working，如爆炸成形，爆炸焊接、爆炸压实、爆炸合成金刚石等）、超声波和声波发射技术、机械设备的冲击强度、工程结构的动态响应等方面。

2. 在武器研制上

应力波理论可用于解决在武器研制中的冲击现象问题，例如弹片的形成、聚能射流、核爆与化爆的效应与防护等；解释高速撞击现象，例如描述微陨石打到火箭、卫星上所造成的破坏；解释和描述高能粒子束对材料的作用等。

3. 在科学研究上

应力波广泛用于材料在高应变率下的力学性能和本构关系的研究，动态断裂的研究，相变的研究，以及复合材料的研究等。

总之，应力波理论具有广泛的应用价值，它是现代声学、地球物理、爆炸力学和材料力学性能研究的重要基础和手段。

13.2 一维应力的控制方程组

所谓一维应力就是应力张量只在一个方向上的分量不为零。一维应力也就是常说的单轴应力，典型的代表是简单拉伸(simple tension)。

现考虑一个初始密度为 ρ_0、横截面积为 A_0 的均匀细长杆，如图 13.6(a)所示。杆在轴向的应力作用下发生变形，见图 13.6(b)。

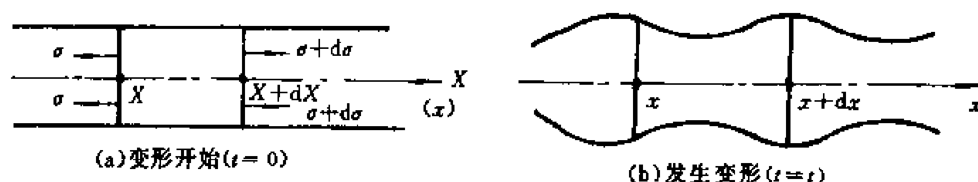


图 13.6 在轴向应力作用下的变形杆

设杆的各横截面上均作用着均布的应力，从而在变形开始时的任一个横截面在变形之后仍然保持平面（即平截面假设），于是横截面可作为整体处理——作为一个"质点"。在此情况下质点的轴向速度 v、应力 σ、应变 ε、横截面积 A、密度 ρ、比内能 e 等均作为轴向坐标 x 和时间 t 的函数，即

$$\begin{cases} v = v_*(x,t) \ , \ \sigma = \sigma_*(x,t) \ , \ \varepsilon = \varepsilon_*(x,t), \\ A = A_*(x,t) \ , \ \rho = \rho_*(x,t) \ , \ e = e_*(x,t) \end{cases} \tag{13.1}$$

现在以杆变形开始的轴向坐标 X，作为质点的标记，即作为拉格朗日坐标(Lagrangian coordinate)，各质点在应力作用下的轨迹和位移则表示为

$$x = x(X,t) \ , \ x|_{t=0} = x(X,0) = X \tag{13.2}$$

$$u = u(X,t) = x(X,t) - X = x - X \tag{13.3}$$

将(13.2)的第一式代进(13.1)式则给出

$$
\begin{cases}
v = v_*(x(X,t),t) = v(X,t) \\
\sigma = \sigma_*(x(X,t),t) = \sigma(X,t) \\
\varepsilon = \varepsilon_*(x(X,t),t) = \varepsilon(X,t) \\
A = A_*(x(X,t),t) = A(X,t) \\
\rho = \rho_*(x(X,t),t) = \rho(X,t) \\
e = e_*(x(X,t),t) = e(X,t)
\end{cases}
\tag{13.4}
$$

质点速度 v 、工程应变(即习用应变) ε 与质点轨迹 x 、位移 u 的关系为

$$
\begin{cases}
v = \dfrac{\partial x}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \\
\varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial X} = \lim\limits_{\Delta X \to 0} \dfrac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} = \dfrac{\partial x}{\partial X} - 1
\end{cases}
\tag{13.5}
$$

作为初等理论,假定应力与应变率无关,即

$$
\sigma = \sigma(\varepsilon) \tag{13.6}
$$

在以下的研究中为方便计,使用拉格朗日坐标 X 、工程应变 ε 和工程应力 σ ,所谓工程应力(engineering stress)即作用在一个变形面上的力与该面形变开始时的面积之比,即

$$
\sigma = \lim_{\Delta A_0 \to 0} \frac{\Delta \Sigma}{\Delta A_0}, \quad \Sigma \text{—— 作用在面上的力} \tag{13.7}
$$

在以上的假定和条件下,研究杆的变形运动只在图 13.6(a)中考虑即可,按图示的微元,其动量守恒则有

$$
\rho_0 A_0 \mathrm{d}X \cdot [(v + \mathrm{d}v) - v] = [(\sigma + \mathrm{d}\sigma) - \sigma] A_0 \mathrm{d}t
$$

推出

$$
\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial X} \tag{13.8}
$$

这就是连续波的运动方程。按图 13.6(a),其能量守恒则有

$$
\rho_0 A_0 \mathrm{d}X \cdot \mathrm{d}e + \frac{1}{2} \rho_0 A_0 \mathrm{d}X \cdot \mathrm{d}(v^2) = \mathrm{d}(A_0 \sigma v) \cdot \mathrm{d}t
$$

即

$$
\rho_0 A_0 \mathrm{d}X \cdot \frac{\partial}{\partial t}(e + \frac{1}{2} v^2) \mathrm{d}t = A_0 \frac{\partial}{\partial X}(\sigma v) \mathrm{d}X \cdot \mathrm{d}t
$$

推出

$$
\rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} = \sigma \frac{\partial v}{\partial X} \tag{13.9}
$$

这就是能量方程。在一维应力波传播的研究中,一般不引进与密度 ρ 有关的连续方程,取而代之由(13.5)式给出

$$
\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \tag{13.10}
$$

这就是所谓的连续方程。式(13.6)、(13.8)、(13.9)、(13.10)则构成了描述一维杆中连续波的封闭方程组:

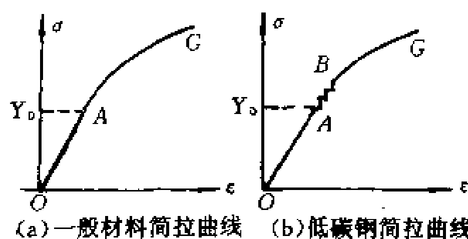
$$
\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial X}
$$

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial e}{\partial t} = \sigma \dfrac{\partial v}{\partial X} = \sigma \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \sigma = \sigma(\varepsilon) \end{cases} \tag{13.11}$$

为了研究方便，引进一个量C(它为物质波速，见下节)，定义作

$$C = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \tag{13.12}$$

在这里 $d\sigma/d\varepsilon \geqslant 0$ 一般总成立，如图 13.7(a)所示。个别材料，如低碳钢，在由弹性进入塑性之初的一小区段，如图 13.7(b)所示的 AB 段，$d\sigma/d\varepsilon \geqslant 0$ 不一定满足。



(a)一般材料简拉曲线　(b)低碳钢简拉曲线

图 13.7

利用(13.12)式和(13.11)式(先不考虑可以独立这些方程之外的能量方程)，则给出另外形式的控制方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial X} = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{\rho_0} \cdot \dfrac{\partial \sigma}{\partial X} = C^2 \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial X} \end{cases} \tag{13.13}$$

再利用(13.5)式，则由上式推出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0 \quad , \quad C = C(\sigma) = C(\varepsilon) = C(X,t) \tag{13.14}$$

13.3　一维应力连续波的特征线解

一维应力波的控制方程是偏微分方程，为了求解，使用第七章所述的特征线解法，对于(13.13)式，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial X} = 0 \\ C^2 \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial X} - \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

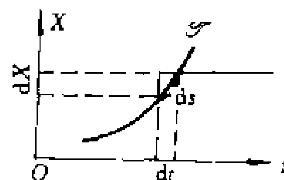


图 13.8

按方向导数法求特征线解，将第二式乘以 λ，然后与第一式相加，则推出

$$(1,\lambda C^2) \cdot (\frac{\partial \varepsilon}{\partial t},\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}) - (\lambda,1) \cdot (\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial x}) = m\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} - n\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \tag{13.15}$$

即 ε 和 v 的偏导数各自构成沿一条曲线 $\mathscr{T}$ 的方向导数 $\partial\varepsilon/\partial s$ 与 $\partial v/\partial s$ 之和，其中 m 和 n 为待定系数，ds 为弧元素：$ds^2 = dX^2 + dt^2$，见图 13.8 所示，而

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = (\frac{\partial \varepsilon}{\partial t},\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}) \cdot \hat{\tau}, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = (\frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial x}) \cdot \hat{\tau}, \quad \hat{\tau} = (\frac{dt}{ds},\frac{dX}{ds}) \tag{13.16}$$

将(13.15)式两边同乘以 ds，并除以 n(设 $n \neq 0$)，则有

$$\frac{m}{n}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s}ds - \frac{\partial v}{\partial s}ds = \frac{m}{n}d\varepsilon - dv = 0 \tag{13.17}$$

把(13.16)式代进(13.15)式中，比较系数则推出

$$\begin{cases}(1,\lambda C^2) = \left(m\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, m\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}\right) \\ (\lambda,1) = \left(n\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}, n\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}\right)\end{cases}$$

从而推出

$$\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 = C^2 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \lambda^{-1} \quad , \quad \frac{m}{n} = \lambda^{-}$$

由上式和(1.17)式,则得出

$$\mathrm{d}X = \pm C\mathrm{d}t \tag{13.18}$$

$$\mathrm{d}v = \pm C\mathrm{d}\varepsilon \tag{13.19}$$

利用(13.12)式,上式又可写成

$$\mathrm{d}\sigma = \pm \rho_0 C\mathrm{d}v \tag{13.20}$$

式(13.18)为特征线方程,式(13.19)或(13.20)为沿特征线的相容关系式。式中的"+"表示右传波;"−"号表示左传波。式(13.12)所定义的 C 为特征线的斜率,亦即连续波的波速。$\rho_0 C$ 称作波阻抗或声阻抗。部分材料的声阻抗(sound impedance)见表 13.1。

对于二阶偏微分方程(13.14),现使用第七章所述的不定线法求特征线解。在 (t,X) 平面上对二阶偏微分方程的特征线则可这样定义:沿该平面上一条 $\mathscr{T}$ 线给出 u 的一阶偏导数($\partial u/\partial t = v$ 和 $\partial u/\partial X = \varepsilon$) 连同其偏微分方程一起,不足以确定函数 u 的全部二阶偏数的话,$\mathscr{T}$ 就是特征线。具体求解做法如下:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\left(\dfrac{\partial u}{\partial X}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial X\partial t}\mathrm{d}t + \dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2}\mathrm{d}X = \mathrm{d}\varepsilon \\ \mathrm{d}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}t + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial X}\mathrm{d}X = \mathrm{d}v \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0\end{cases} \tag{13.21}$$

改写成

$$\begin{bmatrix}0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}X \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}X & 0 \\ 1 & 0 & -C^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial X} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{d}\varepsilon \\ \mathrm{d}v \\ 0\end{bmatrix}$$

由于要求上式不能确定 u 的全部二阶偏导数,则其系数行列式为零,于是推出与(13.18)和(13.19)式的同样结果

$$\mathrm{d}X/\mathrm{d}t = \pm C \quad , \quad \mathrm{d}v = \pm C\mathrm{d}\varepsilon$$

不管是对一阶偏做分方程组(13.13)式,还是对二阶偏做分方程(13.14),均可采用方向导数法和不定线法求特征线解。通过特征线方法将偏微分方程化成了沿特征线的常做分方程,不但方便了问题的求解而且方便了物理问题的作图。

表 13.1 (引自 Kolsky,1953)

	钢	铜	铝	玻璃	橡胶
ρ_0 (g/cm^3)	7.8	8.9	2.7	2.5	0.93
E (dyn/cm^2)	21.0×10^{11}	12.0×10^{11}	7.0×10^{11}	7.0×10^{11}	2.0×10^{7}
C_0 (m/s)	5190	3670	5090	5300	46
ρ_0C_0 (g/cm^2·s)	4.05×10^{6}	3.27×10^{6}	1.37×10^{6}	1.33×10^{6}	4.28×10^{3}

13.4 半无限长杆中弹塑性加载连续纵波

一个从 $X=0$ 右伸到 $X=\infty$ 的截面均匀细长杆,如图 13.6(a)所示,左端施加以单调递增的应力载荷 $\frac{\partial|\sigma|}{\partial t}\geqslant 0$ 或速度载荷 $\frac{\partial|v|}{\partial t}\geqslant 0$,于是便产生从左端向右传播而无反射的连续纵波。

设杆初始处于静止自然态,即在 $t=0$ 时

$$v(X,0)=\varepsilon(X,0)=\sigma(X,0)=0,\quad 0<X<\infty \tag{13.22}$$

在杆的左端 ($X=0$ 处)施加速度载荷,即边界条件为

$$v(0,t)=v_0(\tau),\quad t\geqslant 0 \tag{13.23}$$

在上式中 τ 即时间 t,之所以如此,为的是专门表示 $X=0$ 端面上的时间。

13.4.1 线弹性波

当杆的左端的冲击载荷不大,杆处于弹性状态。这时应力应变满足胡克定律,即(13.6)式可表成线性关系

$$\sigma=E\varepsilon \tag{13.24}$$

上式中 E 为杨氏模量。将上式代进(13.12)中则给出

$$C=C_0=\sqrt{\frac{E}{\rho_0}}=\text{const} \tag{13.25}$$

把 C_0 代进(13.18)、(13.19)和(13.20)式中,给出

$$\mathrm{d}X=\pm C_0\mathrm{d}t\quad,\quad \mathrm{d}v=\pm C_0\mathrm{d}\varepsilon\quad,\quad \mathrm{d}\sigma=\pm\rho_0C_0\mathrm{d}v \tag{13.26}$$

将上式积分,给出右传波和左传波为

$$\text{右传波}\quad\begin{cases}X-C_0t=\xi_1\\ v-C_0\varepsilon=R_1,\quad \sigma-\rho_0C_0v=R_1^*\end{cases} \tag{13.27}$$

$$\text{左传波}\quad\begin{cases}X+C_0t=\xi_2\\ v+C_0\varepsilon=R_2,\quad \sigma+\rho_0C_0v=R_2^*\end{cases} \tag{13.28}$$

在如上式中 ξ_1、ξ_2、R_1、R_1^*、R_2、R_2^* 为积分常数,R_1 和 R_1^*、R_2 和 R_2^* 分别称作第一和第二黎曼不变量(Riemann's invariant)。上式表明所有的特征线都是直线。

在图 13.9 所示的 (X,t) 平面上任一点的物理量,均可通过沿特征线的相容关系式来确定。为此,过 O 点作一条特征线 OA:$X=C_0t$,线 OA 将 (X,t) 平面分成两个区:AOX 区和 tOA 区。

在 AOX 区解初值问题,即哥西问题(Cauchy's problem)。求该区中任一点 G 的物理量,过 G 点作正向特征线 GQ 交于 X 轴于 Q、作负向特征线 GW 交于 X 轴的 W 点。由于

沿 X 轴的初值已给定，即 Q 点和 W 点上的物理量已知，根据：

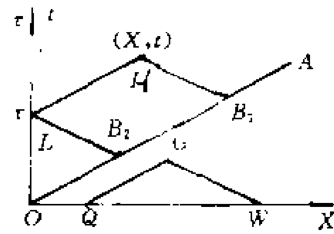


图13.9

$$\begin{cases}\text{沿 } GQ \text{ 线} \quad v - C_0\varepsilon = v(Q) - C_0\varepsilon(Q) \\ \text{沿 } GW \text{ 线} \quad v + C_0\varepsilon = v(w) + C_0\varepsilon(w)\end{cases}$$

于是求得 G 点的 v、ε 值

$$\begin{cases}v = \dfrac{1}{2}\{(v(w) + v(Q)) + C_0(\varepsilon(w) - \varepsilon(Q))\} \\ \varepsilon = \dfrac{1}{2C_0}\{(v(w) - v(Q)) + C_0(\varepsilon(w) + \varepsilon(Q))\}\end{cases} \tag{13.29}$$

将本问题的具体初始条件(13.22)式代进上式，则推出，在 G 点，$V = \varepsilon \equiv 0$，亦即 $\sigma \equiv 0$。由于 G 是任取的，故在 AOX 区中包括 OA 线上

$$v = \varepsilon = \sigma \equiv 0 \tag{13.30}$$

在 tOA 区解混合问题，亦称皮卡德问题(Picard's problem)。过该区任一点做负向特征线均交于 OA 线，如过 H 点的负向特征线交 OA 于 B_1，过边点 L 的交于 B_2，见图13.9。由于沿 OA 线，$v=\varepsilon=\sigma\equiv 0$，故由(13.28)式推出沿 HB_1 线和 LB_2 线的黎曼第二不变量均为零，所以在该区 $R_2=R_2^*\equiv 0$，即恒有

$$v = - C_0\varepsilon = - \sigma/\rho_0 C_0 \tag{13.31}$$

由于边界条件已经给出，见(13.23)式，而过该区中任一点作正向特征线均交于 t 轴，如过 H 点的特征线交 t 轴于 L，沿 HL 线则有

$$X = C_0(t - \tau), \quad v - C_0\varepsilon = R_1 = 2v_0(\tau)$$

由上式和(13.31)式推出

$$v = v_0(\tau) = v_0\left(t - \frac{X}{C_0}\right), \quad \varepsilon = -\frac{1}{C_0}\cdot v_0\left(t - \frac{X}{C_0}\right), \quad \sigma = -\rho_0 C_0 \cdot v_0\left(t - \frac{X}{C_0}\right) \tag{13.32}$$

因 H 点是任取的，故整个 tOA 区的解均为上式所示。由上式看出，杆端的载荷 $v_0(\tau)$ 均以 C_0 速度传播出去，在 t 时刻到达截面 X。特征线在物理上表示小扰动传播轨迹，C_0 称作弹性波速，这样的扰动波称作简单波。

特征线法不但方便了求解，而且提供了图解的便利，图13.10给出了加载扰动的传播图象，以及在任一时刻 t_1 速度 v 沿 X 的分布曲线(即波形曲线，见图13.10(a))和任一截面 X_1 处的速度 v 随 t 变化曲线(即时程曲线，见图13.10(b))。

13.4.2 弹塑性加载波

对于上述的半无限长杆，如果端加载荷 $v_0(\tau)$ 一直增加，则由(13.32)式可知，σ 值亦在成比例地增加，一旦 $|\sigma|\geqslant Y_0$ 则材料进入塑性。Y_0 为材料的初始屈服强度，即端加速度载荷 v_0 满足下式时材料屈服，也就是当 $|v_0|$ 大于或等于屈服速度(yield velocity)v_y 时，即

$$|v_0| \geqslant v_Y = Y_0/\rho_0 C_0 \tag{13.33}$$

材料进入塑性后，(13.24)式给出的线性本构关系不再成立，即(13.12)式不能简化。由于 $C=\sqrt{\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon}}\neq$const，因而正、负向特征线不再都是直线，描述应力波传播的微分关系

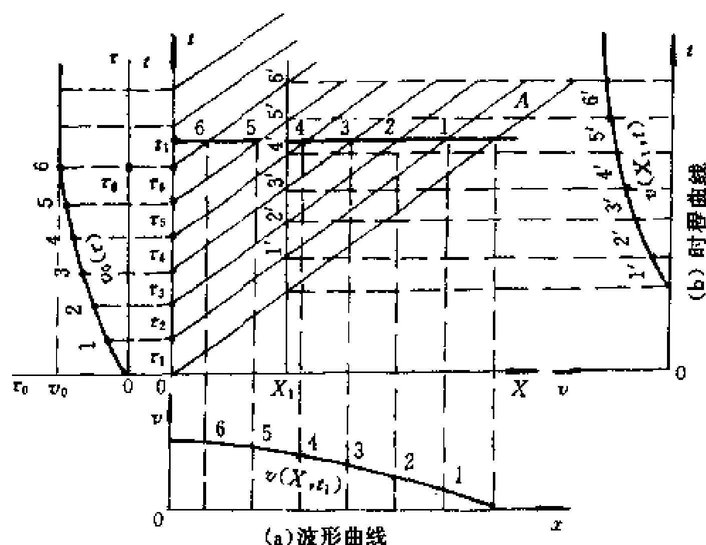


图 13.10

式(13.18)和(13.19)一般不能简单积分。为研究方便引进一个量 φ，它定义作

$$\varphi=\int_0^{\varepsilon}C\mathrm{d}\varepsilon=\int_0^{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho_0 C}\ ,\quad \mathrm{d}\varphi=C\mathrm{d}\varepsilon=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho_0 C} \tag{13.34}$$

将 φ 代进(13.19)式中，并积分则给出相容关系式：

$$v-\varphi=R_1,\quad v+\varphi=R_2 \tag{13.35}$$

在(v,φ)平面上它们成为两族与坐标轴成 $\pm\pi/4$ 的正交直线，积分常数 R_1 和 R_2 仍称**黎曼不变量**。

在式(13.22)和(13.23)的边初条件下，问题的求解仍同前面线弹性波的做法，亦将(X,t)平面分成两个区，见图 13.9。在 AOX 区，包括 OA 线上，

$$v=\varphi\equiv 0\ ,\ 即\ \varepsilon=\sigma\equiv 0 \tag{13.36}$$

在 tOA 区，当$|v_0|\leqslant v_Y$ 仍同线弹性波情形，由杆端所产生的波为弹性简单波；当$|v_0|>v_Y$ 时，由杆端所产生的波为塑性波。但据(13.35)和(13.36)式可推出在 tOA 区不管是弹性还是塑性均满足

$$v+\varphi=R_2\equiv 0,即\ v=-\varphi \tag{13.37}$$

而沿从杆端发出的任一条正向特征线(不管是弹性，还是塑性)均有：$v-\varphi=R_1$(特征线不同 R_1 亦不同)，于是推出沿该特征线则有

$$v=-\varphi=\frac{R_1}{2}=v_0(\tau) \tag{13.38}$$

即沿该特征线 v 和 φ 不变，亦即沿该线 ε 和 σ 为常数，从而推出 $C=C(\varepsilon)=\mathrm{const}$，于是正向特征线的微分关系：$\mathrm{d}X=C\mathrm{d}t$ 可以积分，给出

$$X=C(\varepsilon)\cdot(t-\tau) \tag{13.39}$$

从而说明，在 tOA 区的塑性分区亦为简单波，即为右行**塑性简单波**，正向特征线均为直线，只是其斜率不同而已，$C=C(\varepsilon)$为**塑性波速**。图 13.11 给出图解，其中图 13.11(a)为波形曲线；图 13.11(b)为时程曲线。

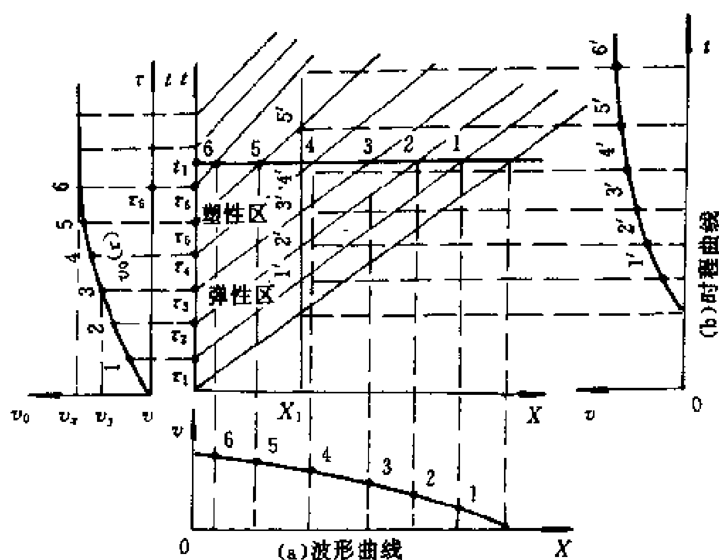


图 13.11

13.4.3　波形的变化与波速的关系

在上述的连续波的传播过程中，波形将可能发生变化，波形的变化与波速有关，波速 C 除依赖材料的密度 ρ_0 外，主要取决于材料的本构关系，即取决斜率 $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon$. 在 $\rho_0=\mathrm{const}$ 情况下，C 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\varepsilon}=\frac{1}{2\rho_0 C}\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^2} \tag{13.40}$$

对于线弹性：$\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}\varepsilon^2=0$，即波速 $C=C_0=\mathrm{const}$，在此情况下，波在传播过程中波形不变。对于塑性波分三种情况：

1. 当 $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}\varepsilon^2=0$，即对线性硬化材料，这时塑性波速 $C=C_1=\mathrm{const}$，波在传播过程中波形不变。对于线性硬化材料

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}=E_1=\mathrm{const},\quad C_1=\sqrt{\frac{E_1}{\rho_0}},\quad E_1\text{—— 材料硬化模量},\quad E_1<E$$

2. 当 $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}\varepsilon^2<0$，即对递减硬化材料，这时后发生的大扰动传播速度 $C=C(\varepsilon)$ 比先发生的小扰动传播速度 $C=C(\varepsilon)$ 要慢，于是塑性波在传播过程中波形越来越平坦，即波形发散。

3. 当 $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}\varepsilon^2>0$，即对递增硬化材料，这时由于后发生的大扰动传播的快，它将不断赶上前面传播的较小扰动，于是波形变得越来越陡，以致于形成强间断——冲击波或称激波。

13.5　连续波·冲击波

所谓应力波是指应力或应变扰动的传播。扰动区与未扰动区，或新扰区与原扰区之间的分界面称作波阵面。扰动有强有弱，因而应力波亦有强有弱。在波阵面上位移 u 的一阶导数发生间断的波，亦即物理量 v、σ、ε 等发生间断的波称作强间断波或冲击波，这样的波

的波形是间断的；在波阵面上 u 的二阶或二阶以上的导数发生间断的波称作弱间断波或连续波，这样的波其波形是连续的。在数学上讲，u 的导数发生间断的面称作奇异面(singular surface)，在连续介质中位移 u 本身不会发生间断。

应力波到底以连续波传播还是以冲击波形式传播，以及波形在传播中的变化，这取决于材料的本构关系以及边初条件。

现以上节所研究的半限长杆中应力波传播为例，但端加载荷(边界条件)分两种情况：第一种连续加载，$v_0(\tau)$ 从 $\tau=0$ 到 $\tau=\tau_6$ 单调递增，在 $\tau\geqslant\tau_6$ 后 $v_0(\tau)=v_*=\text{const}$，见图 13.10 和图 13.11 所示；第二种为突加恒值载荷，即 $v_0(\tau)=v_*=\text{const}$.

1. *对于杆的本构关系为线弹性情况。*若边界条件为光滑连续或弱间断加载，则弹性波也是连续波；若边界条件为强间断，即相当在图 13.10 和图 13.11 中令 $\tau_6\to 0$ 的情形，则弹性波也是强间断波。整个波的传播及波形，见图 13.12(a)所示。

2. *对于杆的本构关系为线弹性—线性硬化塑性情况。*若端加载荷是连续加载，则弹性波和塑性波都是波形保持不变的连续波，但两者的间距将越拉越大；若边界条件为突加恒值载荷，即相当在图 13.10 和图 13.11 中令 $\tau_6\to 0$ 的情形，则形成两个强间断波(双波结构)，它们分别以 C_0 和 C_1 速度传播，见图 13.12(b)所示。

3. *对于杆的本构关系为线弹性—递减硬化塑性情况。*若端加载荷为连续加载，则弹性波和塑性波都是连续波；若边界条件为突加恒值载荷，即相当在图 13.10 和图 13.11 中令 $\tau_6\to 0$ 的情形，弹性波区的平行特征线均重叠在 OA 线上而成为一条强间断的弹性波；其塑性波区的正向特征线出发点将汇聚于 O 点形成一个发散的中心波。这时强间断的边界条件中，其弹性部分以一个弹性强间断波传播；其塑性部分传播一开始就转变为弱间断，以发散的连续波传播，见图 13.12(c)所示。

4. *对于杆的本构关系为线弹性—递增硬化塑性情况*，见图 13.13(a)。由于大扰动的塑性波速度大于较小扰动塑性波速，不管端加载荷是连续的还是强间断，塑性波迟早会以冲击波形式传播。对于突加载荷，塑性波一开始就以强间断形式传播；对于连续加载，塑性波在传播中波形前缘将变得越来越陡，见图 13.13(b)。一旦塑性特征线发生会聚，便形成冲击波。

13.6 冲击波阵面上的守恒条件

关于冲击波阵面上的守恒条件，在第七章已经研究过了，但在那里给出的守恒条件是在欧拉空间(Eulerian space)描述的。而现在所要求的是在拉格朗日空间(Lagrangian space)描述的守恒条件，即在此空间给出波阵面上前后物理量之间的关系。

1. 运动学相容条件

设一平面波在拉格朗日空间传播，其轨迹 $X=\Phi(t)$ 与波速 $\mathscr{D}$ 之间的关系为

$$\mathscr{D}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\dot{\Phi} \tag{13.41}$$

设在 (X,t) 平面上有一函数 ψ，它在波阵面前方为 $\psi^+=\psi^+(X,t)$ 形式；在波阵面后方为 $\psi^-=\psi^-(X,t)$ 形式。当 ψ^+ 和 ψ^- 取在波阵面上时为

$$\begin{cases}\psi^+=\psi^+(X,t)\\ X=\Phi(t)\end{cases}，\text{即 }\psi^+=\psi^+(\Phi(t),t)=\psi^+_*(t)=\psi^+_*$$

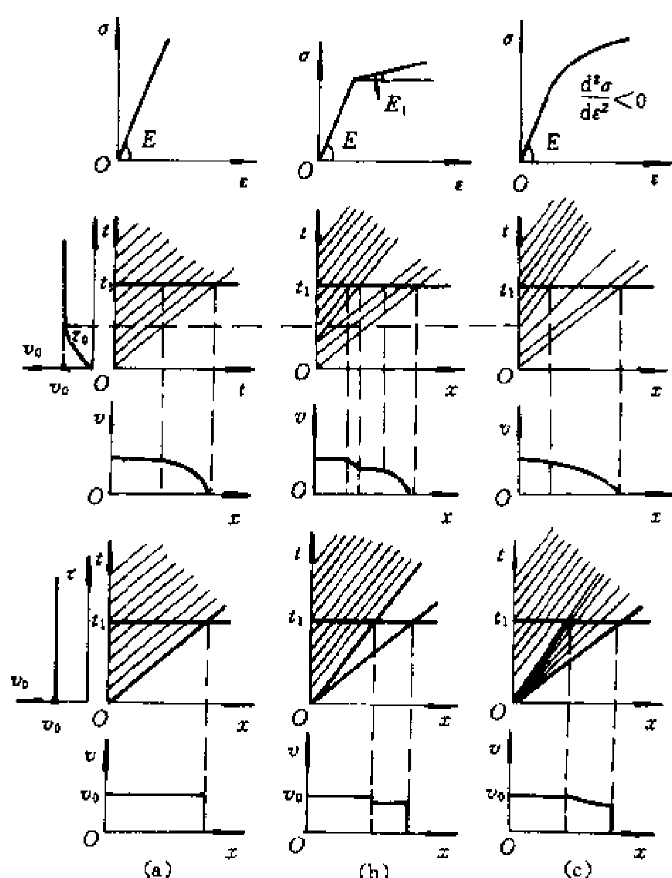


图 13. 12

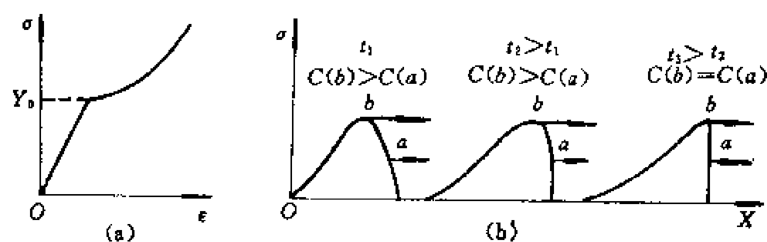


图 13. 13

$$\begin{cases} \psi^- = \psi^-(X,t) \\ X = \Phi(t) \end{cases}，即 \psi^- = \psi^-(\Phi(t),t) = \psi_*^-(t) = \psi_*^-$$

设在波阵面上 ψ^+ 与 ψ^- 相等，并用[]符号表示波阵面上之后缘与前缘的物理量之差，即有

$$\psi^- |_{X=\Phi(t)} - \psi^+ |_{X=\Phi(t)} = \psi_*^- - \psi_*^+ = [\psi_*] = 0 \tag{13.42}$$

对 ψ_*^- 和 ψ_*^+ 求导

$$\frac{d\psi_*^-}{dt} = \frac{\partial\psi^-}{\partial t} + \frac{\partial\psi^-}{\partial X} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\psi^-}{\partial t} + \mathscr{D} \frac{\partial\psi^-}{\partial X}$$

$$\frac{d\psi_*^+}{dt} = \frac{\partial\psi^+}{\partial t} + \frac{\partial\psi^+}{\partial X} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\psi^+}{\partial t} + \mathscr{D} \frac{\partial\psi^+}{\partial X}$$

将如上二式相减，给出

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]+\mathscr{D}\left[\frac{\partial\psi}{\partial X}\right]=\left[\frac{\mathrm{d}\psi_{\cdot}}{\mathrm{d}t}\right]\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\psi_{\cdot}]=0$$

即有

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]=-\mathscr{D}\left[\frac{\partial\psi}{\partial X}\right] \tag{13.43}$$

这就是著名的麦克斯韦定理(Maxwell's theorem)。

现将 ψ 取成位移 u，位移在波阵面上当然满足(13.42)式，即在波阵面上$[u]=0$，将 u 代进式(13.43)中并利用(13.5)式则给出

$$[v]=-\mathscr{D}[\varepsilon] \tag{13.44}$$

这就是冲击波阵面上的运动学相容条件，它是质量守恒的另一种形式。

2. 动力学相容条件

设波阵面在 t 时刻处在 LK 位置，见图13.14，经过 $\mathrm{d}t$ 时刻到达 MN 位置，波阵面在物质空间(拉格朗日空间)传播的距离：$\mathrm{d}X=\mathscr{D}\mathrm{d}t$，根据在 $\mathrm{d}t$ 期间波阵面所扫过的质量元 $LKNM$ 上动量守恒：

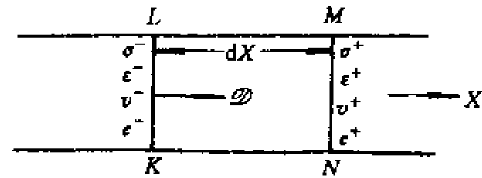


图 13.14

$$(\sigma^{+}-\sigma^{-})A_0\cdot\mathrm{d}t=\rho_0A_0\cdot\mathrm{d}X\cdot(v^{-}-v^{+})$$

则推出

$$[\sigma]=-\rho_0\mathscr{D}[v] \tag{13.45}$$

这就是冲击波阵面上的动力学相容条件，即动量守恒条件。

3. 能量守恒条件

仍在图13.14所示的质量元考虑能量守恒，显然有

$$(\sigma^{+}v^{+}-\sigma^{-}v^{-})A_0\cdot\mathrm{d}t=(e^{-}-e^{+})\rho_0A_0\cdot\mathrm{d}X+\frac{1}{2}\{(v^{-})^2-(v^{+})^2\}\rho_0A_0\cdot\mathrm{d}X$$

推出

$$[\sigma v]=-\rho_0\mathscr{D}[e]-\frac{1}{2}\rho_0\mathscr{D}[v^2] \tag{13.46}$$

利用(13.44)和(13.45)式，经过换算则由上式推出另一种形式

$$\rho_0[e]=\frac{1}{2}(\sigma^{+}+\sigma^{-})[\varepsilon] \tag{13.47}$$

式(13.46)和(13.47)就是冲击波阵面上能量守恒的两种形式。

由(13.44)或(13.45)式可以推出 $\mathscr{D}$ 与$[\sigma]$和$[\varepsilon]$之间的关系，并从此开始约定 $\mathscr{D}$ 为正数，于是得出

$$\mathscr{D}=\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{[\sigma]}{[\varepsilon]}} \tag{13.48}$$

由于规定 $\mathscr{D}$ 为正量，则上述的冲击波相容关系式则写成

$$
\begin{cases}
[v] = \mp \mathscr{D}[\varepsilon] \\
[\sigma] = \mp \rho_0 \mathscr{D}[v] \\
\rho_0[e] = \dfrac{1}{2}(\sigma^- + \sigma^+)[\varepsilon] \\
\qquad\qquad \text{或} \\
[\sigma v] = \mp \left\{\rho_0 \mathscr{D}[e] + \dfrac{1}{2}\rho_0 \mathscr{D}[v^2]\right\}
\end{cases}
\tag{13.49}
$$

在上式中"+"号表示负向(左传)冲击波;"−"号表示正向(右传)冲击波。这组关系式亦称作兰肯—雨贡纽关系式(Rankine-Hugoniot relations),同第七章一样。但它们是在拉格朗日空间(即物质空间)描述的,与第七章的形式不同。

如上考虑的是强间断面上的守恒关系式。如穿过波阵面物理量的跳跃值由有限趋于无限小,即

$$
[\,] \to \mathrm{d}\ ,\ \mathscr{D} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{[\sigma]}{[\varepsilon]}} \to \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}} = C\ ,\ \sigma^- \to \sigma^+ = \sigma
$$

于是(13.49)式变成

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}v = \mp C\mathrm{d}\varepsilon \\
\mathrm{d}\sigma = \mp \rho_0 C\mathrm{d}v \\
\rho_0 \mathrm{d}e = \sigma \mathrm{d}\varepsilon
\end{cases}
\tag{13.50}
$$

这就是穿过弱间断面的相容关系式,它与沿着特征线的相容关系式(13.19)和(13.20)等式当然有所不同。

13.7 杆中弹性冲击波的相互作用

13.7.1 两弹性杆的共轴撞击

为了很好理解两弹性波的相互作用,首先应研究两弹性杆的纵向共轴撞击。设弹性杆 B_1 和 B_2 横截面相同,初始为自然态 $\sigma=\varepsilon=0$,其声阻抗分别为 $(\rho_0 C_0)_1$ 和 $(\rho_0 C_0)_2$,碰撞前它们分别以 v_1 和 v_2 同轴向飞行,见图 13.15(a)所示,$v_2 > v_1$.

在 $t=0$ 时刻两杆碰撞,于是从分界面开始向 B_1 杆发出一个速度为 $\mathscr{D}_1$ 的右传弹性激波、向 B_2 杆发出一个速度为 $\mathscr{D}_2$ 的左传弹性激波,见图 13.15(b)和(c)。因在碰撞界面两边质点速度 v 相等、应力 σ 相等,于是由(13.49)的第二式推出如下关系

$$
\begin{aligned}
\sigma &= -(\rho_0 \mathscr{D})_1 (v - v_1) \\
&= (\rho_0 \mathscr{D})_2 (v - v_2)
\end{aligned}
\tag{13.51}
$$

又因杆为线弹性,故由(13.48)式推出

$$
\mathscr{D}_1 = (C_0)_1,\quad \mathscr{D}_2 = (C_0)_2
\tag{13.52}
$$

于是由以上两式求得碰撞区的 v 和 σ 为

$$
\begin{cases}
v = \dfrac{(\rho_0 C_0)_1 v_1 + (\rho_0 C_0)_2 v_2}{(\rho_0 C_0)_1 + (\rho_0 C_0)_2} \\
\sigma = -(v_2 - v_1) \Big/ \left\{\dfrac{1}{(\rho_0 C_0)_1} + \dfrac{1}{(\rho_0 C_0)_2}\right\}
\end{cases}
\tag{13.53}
$$

波在(X,t)平面上的传播与在(v,σ)平面上图解，分别见图 13.15(c)和(d)。

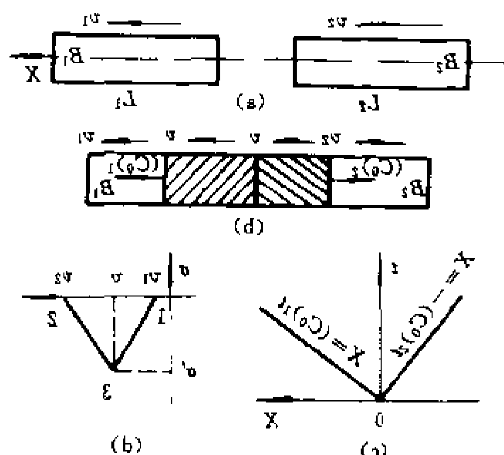


图 13.15

13.7.2 两弹性激波的相互作用

一原处于静止自然态(即$\sigma_0=\varepsilon_0=v_0=0$)的弹性杆，在$t=0$时其左端$(X=0)$和右端$(X=L)$分别突加恒速载荷$v_2$和$v_1$，于是从杆的左端发出一右传弹性激波，从杆的右端传出一左传弹性激波，见图 13.16(a)所示。

据(13.49)的第二式，得出区 1 和区 2 中的应力σ_1和σ_2

$$\sigma_1=\rho_0C_0v_1\quad,\quad\sigma_2=-\rho_0C_0v_2 \tag{13.54}$$

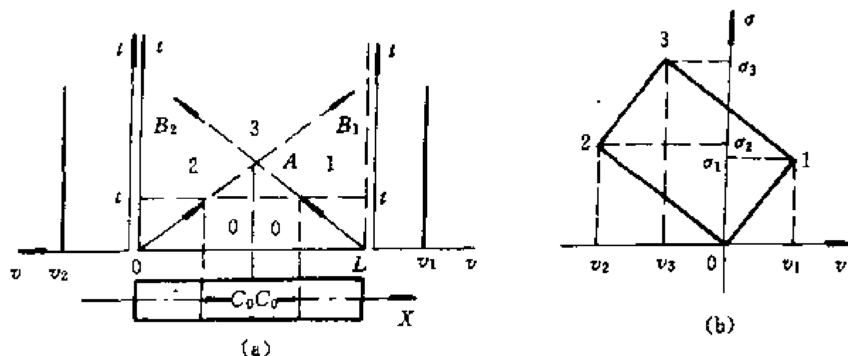


图 13.16

在$t=L/2C_0$时两波相遇，在相遇点发生内撞击，这如同"两个弹性杆突然撞击"，撞击后(假定波碰撞后介质仍在弹性范围内)，由碰撞点A反射(或者说透射)一个右传弹性激波AB_1、一个左传弹性激波AB_2，形成相互作用区 3。据(13.49)的第二式，则有

$$\begin{cases}\sigma_3-\sigma_1=-\rho_0C_0(v_3-v_1)\\ \sigma_3-\sigma_2=\rho_0C_0(v_3-v_2)\end{cases}$$

由上式及(13.54)式解出

$$\begin{cases}v_3=v_1+v_2\\ \sigma_3=\sigma_1+\sigma_2\end{cases} \tag{13.55.1}$$

由此可见，两弹性波相互作用的结果相当于两弹性波分别单独作用的结果之和，即叠加原理成立。这是由于弹性波的控制方程是线性的，见(13.14)式，在该式中现$C=C_0$. 这种叠加结果按图解亦很显然，见图 13.16(b)。

注意，(13.55.1)式成立的条件是杆初始为静止自然态，如若初态v_0、ε_0、σ_0不为零，则两波作用的结果是

$$\begin{cases}v_3-v_0=(v_1-v_0)+(v_2-v_0)\\ \sigma_3-\sigma_0=(\sigma_1-\sigma_0)+(\sigma_2-\sigma_0)\end{cases} \tag{13.55.2}$$

13.7.3 杆中弹性激波在固定端的反射

设一长为 L、声阻抗为$(\rho_0 C_0)$的弹性杆初始处于静止自然态，在 $t=0$ 时左端突加恒速载荷 v_2，于是发出一右传弹性激波，见图 13.17(a)，在区域 2 中的应力 σ_2 为

$$\sigma_2 = -\rho_0 C_0 v_2 \tag{13.56}$$

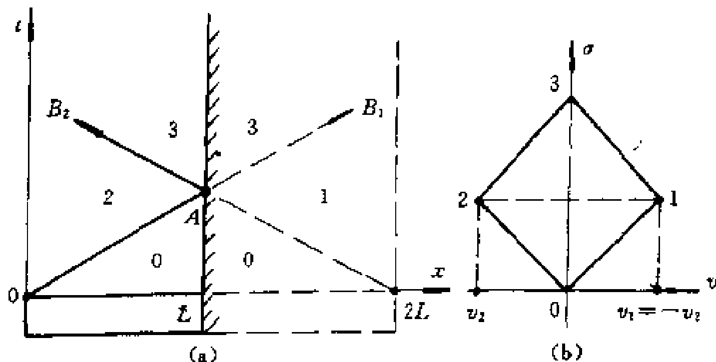


图 13.17

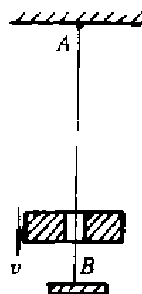


图 13.18

在 $t=L/C_0$ 时激波到达右边固定端，因环境的改变而产生新扰动，入射波在此反射一个左传激波 AB_2，在 AB_2 之后形成区域 3。因杆右端为固定端(不动刚壁)，故有

$$\begin{cases} v_3 = 0 \\ \sigma_3 - \sigma_2 = \rho_0 C_0 (v_3 - v_2) \end{cases}$$

从而求得

$$\sigma_3 = 2\sigma_2 \tag{13.57}$$

即激波在固定端反射应力增加一倍，这就是在 13.1 节中所述的落重冲拉钢丝(见图 13.18 或图 13.5)为何总在 A 端而不在 B 端断开的原因所在。

该问题求解亦可直接利用(13.55.1)式。将以固定壁为对称、把杆开拓成 $2L$，见图 13.17(a)所示，在 $X=2L$ 端亦同时突加恒速载荷 $v_1=-v_2$，于是该问题成了一个长为 $2L$ 的静止自然态的杆两端突加恒值载荷，则两入射波的相遇处($X=L$)即相当固壁，从而可利用(13.55.1)式，在该式中令 $v_1=-v_2$，则求得与上同样的结果：

$$v_3 = 0 \quad , \quad \sigma_3 = 2\sigma_2$$

该问题在速度平面(v,σ)上的图解，见图 13.17(b)。

13.7.4 杆中弹性激波在自由端的反射

与如上问题唯一不同的是将右固定端换成自由端，波的入射和反射如图 13.17(a)所示。求解反射后的区域 3 中的状态亦有两种办法，直接求解和间接办法。因

$$\sigma_3 = 0 \quad , \quad \sigma_3 - \sigma_2 = \rho_0 C_0 (v_3 - v_2)$$

而

$$\sigma_2 = -\rho_0 C_0 v_2$$

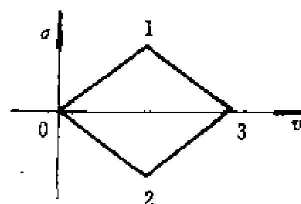


图 13.19

于是求得：

$$v_3 = 2v_2 \tag{13.58}$$

即入射激波在自由端反射后质点速度增加一倍。求解区域 3 亦可接如上的对称开拓办法，

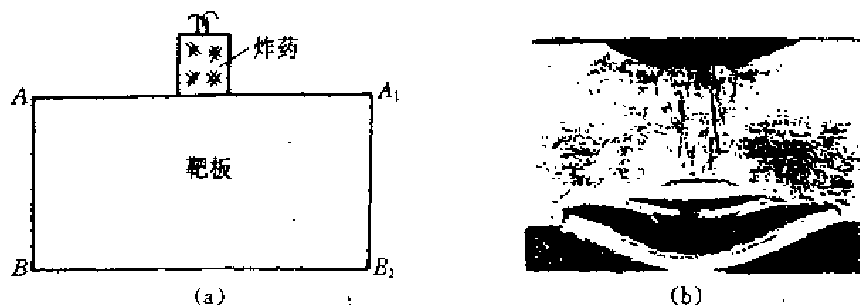
在开拓后的杆之两端加上同速载荷 $v_1=v_2$，则由(13.55.1)式推出与上同样的结果

$$v_3 = 2v_2, \qquad \sigma = 0$$

在速度平面(v,σ)上的图解，见图13.19。

13.8 应力波在自由面反射引起的拉应力与断裂

物体在动载强冲击下产生与静压作用下截然不同的现象，如13.1节中所述，其中最重要的现象是材料在一个方向被强烈冲击时，却可能在它的自由面附近产生强烈拉伸以至断裂，见图13.20。材料在动载作用下产生这种现象的重要原因在于：压力脉冲在自由面反射成拉伸应力波，即在物体中形成拉应力，当拉应力超过材料的动态断裂强度时将发生断裂。例如，在爆炸压接导线中出现的缩颈现象以及内部的钢芯断裂就是应力波所致[2]。



(a) (b)

图13.20

压力脉冲在物体自由面反射之所以形成拉应力，其原因在于：一个压力脉冲是由脉冲头部的压缩加载波和随后的卸载波所组成，当压力波头在自由面反射成的卸载波与尾随在压力波头之后的卸载波相互作用(入射的卸载波同反射的卸载波相互作用)时就形成拉应力。

在如下分析上述拉应力形成时，将按弹性应力波理论，诚然物体在强压力脉冲作用下所形成的应力波已不再是单纯的弹性波。但是，用弹性应力波理论分析物体在强压力脉冲作用下所形成的拉应力以至于断裂问题，不仅方法简单而且非常有效，长期从事动态破坏研究的美国学者莱茵哈特(J. S. Rinehart)指出：

"所有物体都假定表现为线弹性形式，这大大简化了研究方法，其结果与实际观察的状态十分一致，这是出人意外的。"[3]

物体在拉应力作用下能否断裂、能裂成几片以及断裂在什么地方，这与材料的动态断裂强度、压力脉冲的强度与形状有关。

材料的动态断裂的判据很多，如损伤积累判据、瞬时断裂判据等。为了研究方便我们使用瞬时断裂判据，表13.2列出了几种材料的动态断裂强度σ_c。一旦应力σ满足下式，材料将发生断裂，即满足

$$\sigma \geqslant \sigma_c \tag{13.59}$$

现分析物体在压力脉冲作用下引起拉应力以至断裂的几种情况。

13.8.1 矩形压力脉冲在杆自由端反射的情形

在一个长为 L、原处于静止自然态的杆，左端作用一个矩阵压力脉冲，如图 13.21(a)所示，脉冲的强度为 σ_m，脉冲的时间为 τ，脉冲在杆中所形成的波长 λ 为

$$\lambda = C_0\tau \tag{13.60}$$

该脉冲压力波头(即图 13.21(a)所示物理平面上的 OA 线)在自由端 $X=L$ 反射后，形成左传卸载冲击波(物理平面上的 AG 线)。当反射卸载冲击波(AG 线)与入射卸载冲击波(τB 线)在 $X=L_Q$ 处(即在 Q 点)相遇后，便形成拉应力。根据弹性冲击波阵面上的守恒关系式，可给出图 13.21(a)所示的几个区中的状态：

表 13.2 几种材料的瞬时断裂强度

名称	σ_c(单位：巴)
铝合金	9800
铜	29250
黄铜	21090
低碳钢	15640
合金钢	30800

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = -\sigma_m,\ v_1 = \sigma_m/\rho_0 C_0 \\
&\sigma_3 = 0\ ,\ v_3 = 2v_1 = 2\sigma_m/\rho_0 C_0 \\
&\sigma_4 = 0\ ,\ v_4 = 0 \\
&\sigma_6 = \sigma_m,\ v_6 = v_1 = \sigma_m/\rho_0 C_0
\end{aligned} \tag{13.61}$$

从 Q 点(即从 $X=L_Q$ 处)开始形成的拉应力 σ_6，即最大拉应力。按瞬时断裂准则(13.59)式，如果

$$\sigma_6 = \sigma_m \geqslant \sigma_c \tag{13.62}$$

则材料发生断裂，断裂点当然发生在最先出现拉应力的 Q 点，即在杆的 $X=L_Q$ 处。裂片的厚度 δ 和速度 v_f 分别为

$$\delta = \lambda/2 = C_0\tau/2 \quad , \quad v_f = \frac{\sigma_m \cdot \dfrac{\lambda}{C_0}}{\rho_0 \delta} = \frac{2\sigma_m}{\rho_0 C_0} = 2v_1 \tag{13.63}$$

杆在 $X=L_Q$ 断裂之后，裂片带走了全部的入射冲量，而压杆的余下部分$[0,L_Q]$全部卸载又回到原静止自然态。

该问题的处理还可使用叠加原理，即以原杆的右端为对称面将杆对称地开拓成 $2L$ 长，在 $X=2L$ 端加上与 $X=0$ 端完全相反的脉冲载荷，如图 13.21(a)所示。这样，两个相反的压力脉冲作用的结果就相当于压力脉冲在原杆右自由端反射的情况。入射脉冲波形和反射波形及它们的传播，见图 13.21(b)。

13.8.2 三角形压力脉冲在杆自由端反射的情形

与上述问题的唯一差别是杆左端的矩形压力脉冲换成三角形的压力脉冲，对该问题的处理同上一样，使用叠加原理，亦将杆对称开拓成 $2L$ 长，在其右端施加与左端完全相反的载荷(拉伸冲击)，见图 13.22(a)。从现杆两端出发的入射波波形之传播如图 13.22(b)所示。

与矩形压力脉冲不同，三角形压力脉冲波头在自由端刚一反射就形成拉应力，见图 13.23(b)所示，$\triangle HGL$ 区为净拉应力区。而矩形脉冲只有入射压力波长在自由端有 1/2 以上被反射时才出现拉应力。两种形式的脉冲的另外重要区别是：(一)杆对于矩形脉冲，

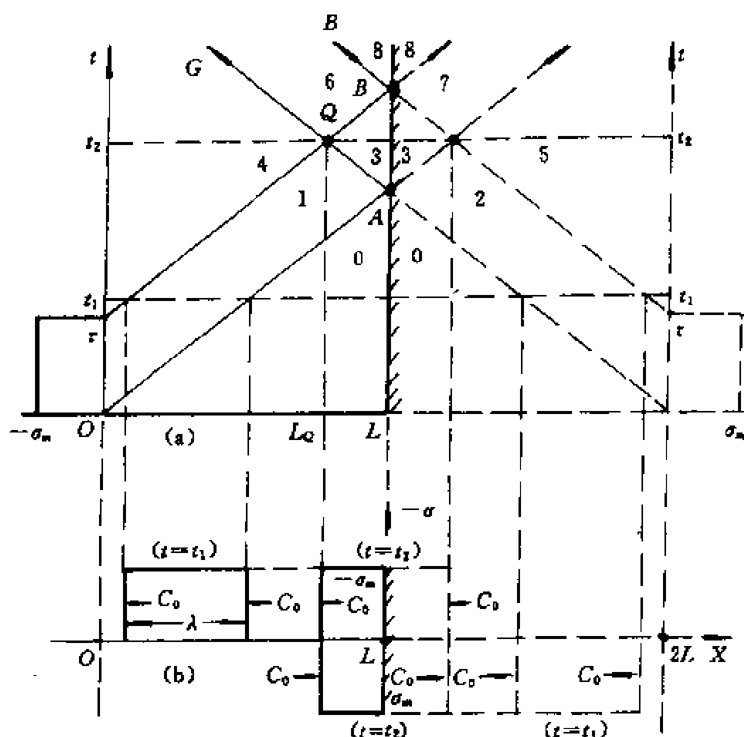


图 13.21

若断裂只能裂一片;(二)杆对于三角形脉冲,杆在自由端附近可能断裂多片,例如,杆若在图13.23(b)所示的H点发生断裂,裂片δ飞走。于是杆在此形成新的自由面,但在杆中还存在着压力脉冲$\triangle ABH$。如若$\overline{BH}>\sigma_c$,则这个残留的压力脉冲在该新自由端反射后,还会形成新的断裂。以此类推,以至形成多个裂片。

如果压力脉冲不裂,$\sigma_m<\sigma_c$,杆不会发生断裂,压力脉冲在自由端附近其各个时刻的入射波形与反射波形,如图13.23的各图所示。

13.8.3 一般的压力脉冲在物体自由面上反射的情况

以上分析的是入射到杆中的压力脉冲,即对于一维应力波。关于作用在非一维物体上的压力脉冲在其自由面上的反射,完全可参照如上的分析。在被作用物体中所产生的拉应力亦是两个卸载波作用的结果。于是,我们可分析图13.20所示的那样压力脉冲对物体所造成破坏的各种情形。

①当物体很扁平见图13.20(a),从冲击的正对面的自由面BB_1反射的卸载波与尾随压力脉冲的卸载波先相遇。若造成的拉应力足够强,则形成图13.20(b)所示的断裂,即发生了层裂(spalling),碎甲弹就是利用了这一原理。

②当物体比较扁平,见图13.24(a),从正对面反射的卸载波同由两侧自由面(AB面和A_1B_1面)反射的裂卸载波在底角处先相遇,见图13.24(b),若形成的拉应力足够裂,则造成角裂(broken corners),见图13.24(c)。

③当物体比较细长,见图13.25(a),从物体的两侧自由面(AB面和A_1B_1面)反射的强卸载波在物体的中部先相遇,见图13.25(c),若形成的拉应力足够强,则造成心裂

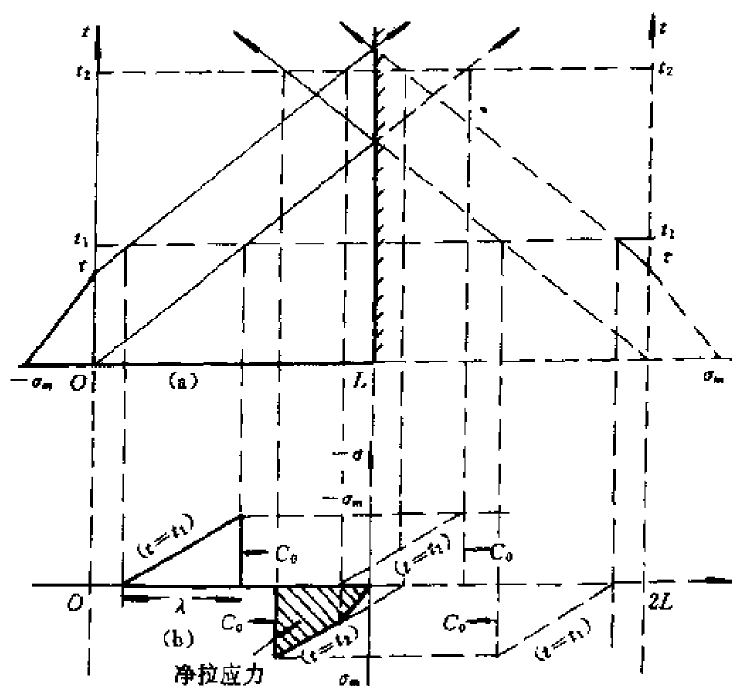
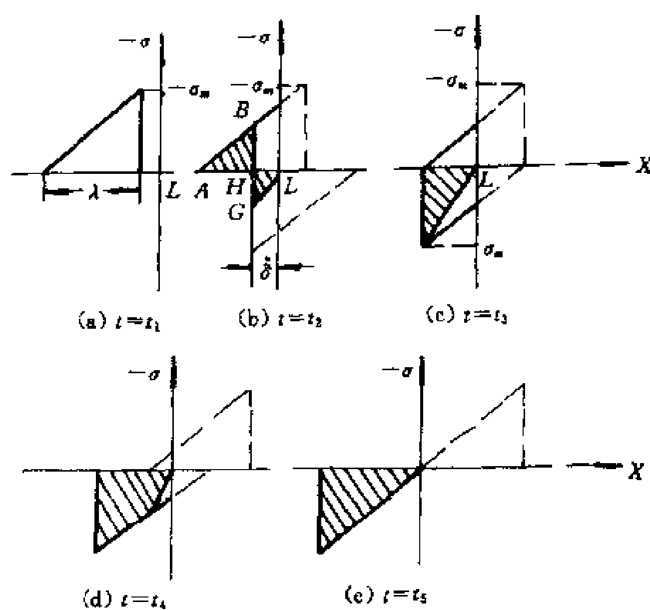


图 13.22



(a) $t=t_1$ (b) $t=t_2$ (c) $t=t_3$

(d) $t=t_4$ (e) $t=t_5$

图 13.23

(broken centre)，见图 13.25(d)。

在 13.1 节中所述的那些动态破坏现象，特别是关于爆炸压接导线的奇特现象，利用以上的方法完全可以解释和预测。

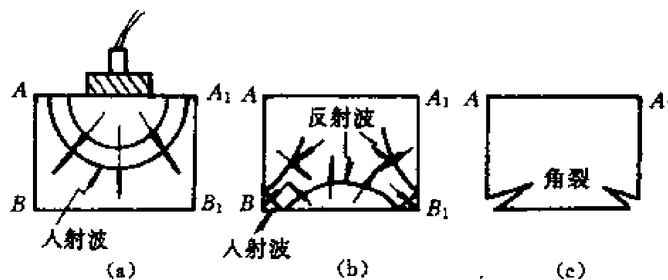


图 13.24

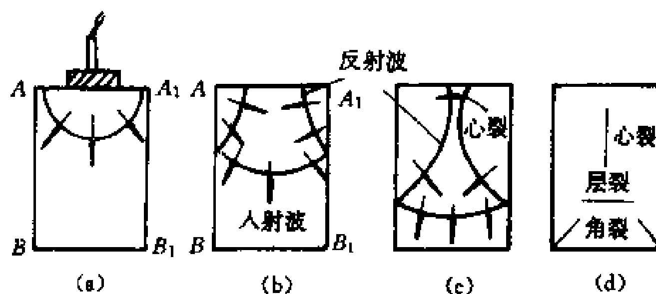


图 13.25

13.9 一维应力从塑性态卸载的卸载波

前面研究了线弹性波及其作用问题。对于线弹性波面言，在描述其作用时，不必区分过程是加载还是卸载。这是因为加载和卸载都遵循同一本构关系，加载波和卸载波均以同样波速 C_0 传播，因而无须区别对待。但对于弹性波与塑性波、塑性波与塑性波相互作用时，则须区别过程是加载还是卸载。这是由于塑性卸载过程不但遵循与塑加载不同形式的本构关系，而且其本构依赖卸载前的塑性状态的应力应变值。

13.9.1 弹性卸载假定

大量实验表明：对于一维应力而言，材料从塑性状态卸载或卸载后重新弹性加载，其应力应变曲线的斜率基本等于初始弹性加载时的斜率，即平行于图 13.26 中的 $\overline{AB}$ 线。于是提出了弹性卸载假定(elastically unloading assumption)，其内容为：对于弹塑性材料，若卸载时的塑性应力应变为 σ_m 和 ε_m，当从此状态卸载或卸载中又重新加载，只要其应力值不超过 $|\sigma_m|$，应力与应变就成线性关系，且其斜率平行初始弹性加载的应力应变直线，即图 13.26 中的卸载关系直线 $\overline{A_1B_1}/\!/\overline{AB}$。在数学上，一维应力的塑性卸载应力 $\bar{\sigma}$ 与应变 $\bar{\varepsilon}$ 的关系表示为

$$\bar{\sigma} = \sigma_m + E(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_m) \qquad (13.64)$$

$$|\bar{\sigma}| \leqslant |\sigma_m|$$

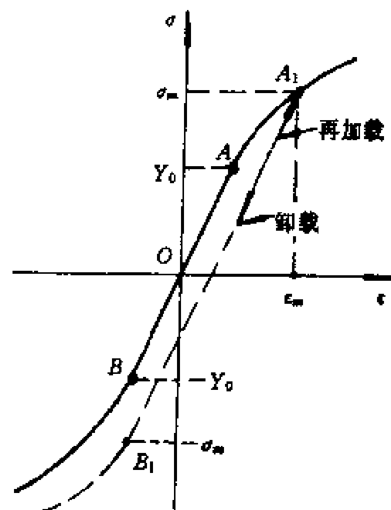


图 13.26

显然，材料在卸载时，不同质点（不同的 X）可能处于不同的塑性状态，即 σ_m 和 ε_m 随 X 变化，但对同一质点在卸载过程中 σ_m 和 ε_m 当然不随 t 变化，因此

$$\sigma_m = \sigma_m(X) \quad , \quad \varepsilon_m = \varepsilon_m(X) \tag{13.65}$$

13.9.2 卸载的控制方程组

在 13.2 节中给出了一维应力连续波的控制方程组。它不管是对弹性情况，还是塑性情况，对加载还是对卸载均适用，所不同的只是其中的本构关系的具体形式不一样。对于卸载过程，方程组(13.11)写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} = \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial X} \\ \rho_0 \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} \\ \bar{\sigma} = \sigma_m + E(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_m) \end{cases} \tag{13.66}$$

卸载中质点的速度 $\bar{v}$、应变 $\bar{\varepsilon}$ 与位移 $\bar{u}$ 的关系为

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad , \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \tag{13.67}$$

式(13.66)可以改写成以下几种形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial X} = \dfrac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} = C_0^2 \dfrac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial X} + \dfrac{1}{\rho_0} \dfrac{d\sigma_m}{dX} - C_0^2 \dfrac{d\varepsilon_m}{dX} \end{cases} \tag{13.68.1}$$

其中 $C_0^2 = E/\rho_0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = \rho_0 C_0^2 \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial X} \\ \dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial X} = \rho_0 \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} \end{cases} \tag{13.68.2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial X^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma_m}{dX} - C_0^2 \frac{d\varepsilon_m}{dX} \tag{13.68.3}$$

对(13.68)诸式按特征线法求解，则得到如下形式的特征线方程以及沿特征线上的相容关系式：

$$\begin{cases} dX = \pm C_0 dt \\ d\bar{v} = \pm \left(C_0 d\bar{\varepsilon} + \dfrac{1}{\rho_0 C_0} d\sigma_m - C_0 d\varepsilon_m \right) \end{cases} \tag{13.69.1}$$

或

$$\begin{cases} dX = \pm C_0 dt \\ d\bar{\sigma} = \pm \rho_0 C_0 d\bar{v} \end{cases} \tag{13.69.2}$$

由以上两式看出，在弹性卸载假定下，卸载连续波是以线弹性波速 C_0 传播。不但卸载连续波以 C_0 速度传播，而且由(13.48)式和(13.64)式，可以推出卸载强间断波亦以 C_0 速度传播。

13.10 杆中弹塑性波的迎面相互作用

对于相向传播的弹塑性波发生迎面作用时，必须区别这两个波是**同号波**还是**异号波**。

同号波(是指两波或同为压缩波,或同为位伸波)相互作用时,结果加载;异号波(指一个为压缩波,另一个为拉伸波)相互作用时,结果卸载。

13.10.1 弹塑性波的迎面加载情况

1. 对于强间断的弹塑性波

设一长为 L 的均匀等截面的杆,原处于静止自然态,在 $t=0$ 时右端突加恒速载荷 $v_3>0$,左端突加恒速载荷 $v_4<0$. 设杆材为线弹－塑性线性硬化材料,见图 13.12(b),其本构关系写成

$$\sigma=\begin{cases}E\varepsilon & (\text{弹性})\\ -Y_0+E_1(\varepsilon+\varepsilon_Y) & (\text{塑性压缩})\\ Y_0+E_1(\varepsilon-\varepsilon_Y) & (\text{塑性拉伸})\end{cases} \tag{13.70}$$

在上式中 $\varepsilon_Y=Y_0/E$, E_1 为塑性线性硬化模量。据(13.48)式和上式推出强间断波速 $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{E}{\rho_0}}=C_0\quad, & \text{对于弹性}\\ \sqrt{\dfrac{E_1}{\rho_0}}=C_1\quad, & \text{对于塑性}\end{cases} \tag{13.71}$$

由于突加载荷 v_3 和 v_4 的值均大于屈服速度 v_Y,故从杆的两端同时形成双波传播,见图 13.27,该图中所示的各波之间的 0、1、2、3、4 区中的状态(其物理量以各区的编号为下标)为

$$\sigma_0=v_0=0$$

$$\sigma_1=\sigma_2=Y_0,\quad v_1=-v_2=v_Y=\frac{Y_0}{\rho_0C_0}$$

$$\sigma_3=\sigma_1+\rho_0C_1(v_3-v_1)\ ,\quad \sigma_4=\sigma_2-\rho_0C_1(v_4-v_2)$$

跑在塑性波之前的两个弹性先驱波在杆中央相遇。因为这两个波为同号波且各自加载到弹性极限状态,故相互作用后,透射出来的波一定为塑性波,透射的波又与同号的塑性波迎面作用,进一步加载,再透射出来的波当然为塑性波。作用结果如图所示,其中 5 区的状态满足

$$\begin{cases}\sigma_5-\sigma_2=\rho_0C_1(v_5-v_2)\\ \sigma_5-\sigma_1=-\rho_0C_1(v_5-v_1)\end{cases}$$

则推出

$$\begin{cases}v_5=0\\ \sigma_5=Y_0+\rho_0C_1v_Y\end{cases}$$

区域 6,7,8 均为塑性加载区,同理可求。

在图 13.27 中还给出了某一时刻的应力波形。

2. 对于弱间断的弹塑性波

现考虑一处于状态(v_a,σ_a)的均匀等截面的有限长杆,其本构关系为图 13.12(c)所示的递减硬化材料。在 $t=0$ 时刻,左右端均加上从 v_a 开始的"逐加"速度载荷,右端的速度增加到 v_b 后保持常值($v_b>v_a$);左端的减小到 v_c 后保持常值($v_c<v_a$). 于是在杆中形成两束迎面传播的弹塑性简单拉伸波 Ⅰ 和 Ⅱ,见图 13.28(a)。

波Ⅰ和Ⅱ在a点作用开始，在d点作用结束。因为同号波，两波作用继续加载，透射出来的为两束加载了的弹塑性简单波Ⅲ和Ⅳ。穿过简单波区Ⅰ和Ⅱ，亦即沿特征线$\overset{\frown}{ab}$和$\overset{\frown}{ac}$则有

$$v_b = v_a + \int_{\sigma_a}^{\sigma_b} \frac{d\sigma}{\rho_0 C}, \quad v_c = v_a - \int_{\sigma_a}^{\sigma_c} \frac{d\sigma}{\rho_0 C}$$

穿过简单波区Ⅲ和Ⅳ，亦即沿特征线$\overset{\frown}{bd}$和$\overset{\frown}{cd}$有

$$v_d = v_b - \int_{\sigma_b}^{\sigma_d} \frac{d\sigma}{\rho_0 C}, \quad v_d = v_c + \int_{\sigma_c}^{\sigma_d} \frac{d\sigma}{\rho_0 C}$$

利用(13.34)式所定义的φ，以上各式可写成

$$v_b = v_a + \varphi_b - \varphi_a, \quad v_c = v_a - \varphi_c + \varphi_a$$
$$v_d = v_b - \varphi_d + \varphi_b, \quad v_d = v_c + \varphi_d - \varphi_c$$

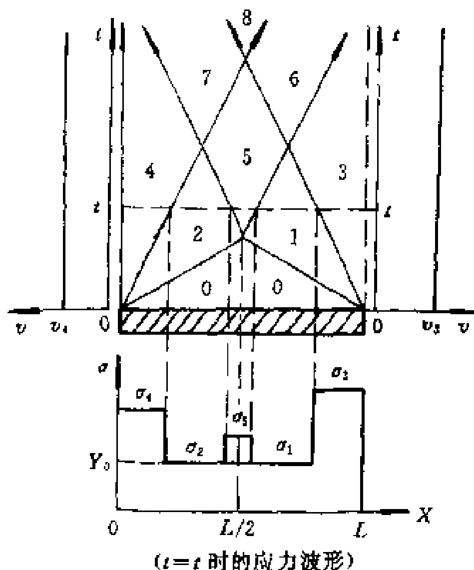


图 13.27

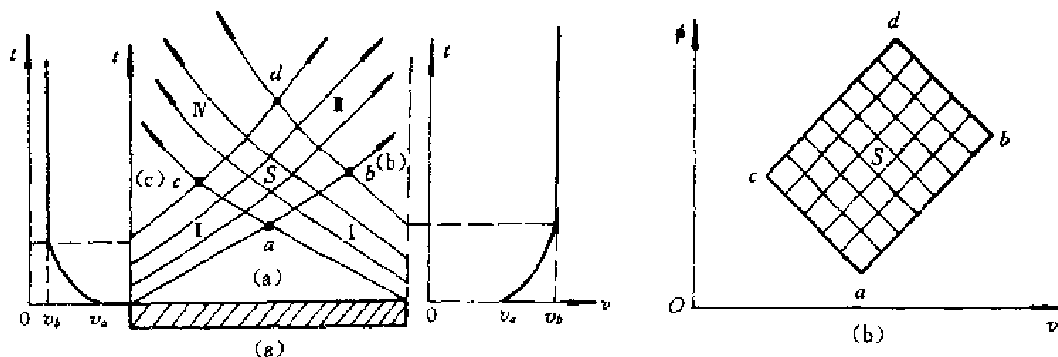


图 13.28

因而由以上诸式得出(图解，见图 13.28(b))：

$$\begin{cases} v_d = v_b + v_c - v_a \\ \varphi_d = \varphi_b + \varphi_c - \varphi_a \end{cases} \tag{13.72}$$

上式可改写成

$$\begin{cases} v_d - v_a = (v_b - v_a) + (v_c - v_a) \\ \varphi_d - \varphi_a = (\varphi_b - \varphi_a) + (\varphi_c - \varphi_a) \end{cases} \tag{13.73}$$

将上式同(13.55.2)式比较看出，在引进φ代替σ后，这种非线性弱间断弹塑性波迎面作用，如同线弹性波一样，叠加原理成立。注意，式(13.55.2)虽对强间断弹性波成立，但将强间断波阵面换成弱间断的弹性连续波区，该式照样成立。

13.10.2 弹塑性波的迎面卸载情况

在第一部分研究的是同号波的迎面加载情形，现考虑异号波的迎面卸载情况。

1. 对于强间断弹塑性波

与前一部所不同的是线性硬化杆两端的速度载荷同向，现取$v_3 > v_Y$，$v_4 > v_Y$，于是从

杆的两端发出异号的弹塑性双波，见图 13.29(a)。在其 0、1、2、3、4 区状态为

$$\sigma_0 = v_0 = 0$$

$$\sigma_1 = Y_0, \quad v_1 = v_Y = Y_0/\rho_0 C_0; \quad \sigma_3 = \sigma_1 + \rho_0 C_1 (v_3 - v_1)$$

$$\sigma_2 = -Y_0, \quad v_2 = v_Y = Y_0/\rho_0 C_0; \quad \sigma_4 = \sigma_2 - \rho_0 C_1 (v_4 - v_2)$$

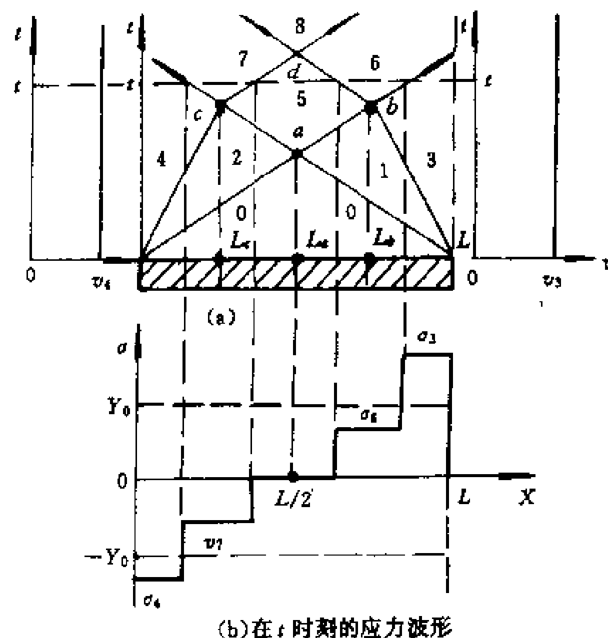
在 $t=L/2C_0$ 时，两个弹性先驱波在杆的中点($L_a=L/2$)相遇，即(X,t)平面上的 a 点相遇，因两波异号，透射出来的波一定为弹性波，在区 5 中有

$$\begin{cases} \sigma_5 - \sigma_2 = \rho_0 C_0 (v_5 - v_2) \\ \sigma_5 - \sigma_1 = -\rho_0 C_0 (v_5 - v_1) \end{cases}$$

则给出

$$\sigma_5 = 0, \quad v_5 = 2v_1 = 2v_2 = 2v_Y$$

在 $t=L/(C_0+C_1)$ 时刻，透射的弹性波与塑性加载波分别在 $L_b=C_0L/(C_0+C_1)$ 和 $L_c=C_1L/(C_0+C_1)$ 处相遇，即在(X,t)平面上的 b 点和 c 点相遇，作用结果，塑性加载波有一定的卸载。现以 b 点为例，从 b 点透射出来的右传波一定为弹性卸载波，按式(13.64)这个强卸载波速 $\overline{\mathscr{D}}$ 为



(b)在 t 时刻的应力波形

图 13.29

$$\overline{\mathscr{D}} = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} = C_0$$

从 b 点发出的左传波有两种可能：或为弹性波，或为新双波。如若为图 13.29(a)所示的弹性波，则有

$$\begin{cases} \sigma_6 - \sigma_5 = \rho_0 C_0 (v_6 - v_5) \\ \sigma_6 - \sigma_3 = -\rho_0 C_0 (v_6 - v_3) \end{cases}$$

从而求得

$$\sigma_6 = \frac{1}{2}\{\sigma_3 + \rho_0 C_0 (v_3 - v_5)\} = \frac{1}{2}\left\{\rho_0 (C_0 + C_1) v_3 - \left(\frac{C_1}{C_0} + 1\right) Y_0\right\}$$

因为到目前为止，在$[L_c, L_b]$的那段杆，历史上只加载到弹性极限，故 σ_6 必须满足

$$\sigma_6 \leqslant Y_0$$

于是推出右端加载 v_3 应满足的条件，并考虑到 $v_3 > v_Y$，故有

$$v_Y < v_3 \leqslant \frac{3C_0 + C_1}{C_0 + C_1} v_Y \qquad (13.74)$$

这就是左传塑性加载波在 b 点消失的条件。同理可推出，右传塑性加载波在 c 点消失的条件为

$$v_Y < v_4 \leqslant \frac{3C_0 + C_1}{C_0 + C_1} v_Y \tag{13.75}$$

如果杆右端的速度载荷不满足(13.74)式，塑性加载波在 b 点不能消亡，则从 b 点向左传出的为弹塑性双波结构，即在塑性波之前，又出现一个弹性先驱波，因杆的这一段 $[L_c, L_b]$ 现为弹性状态。如若在杆左端速度载荷不满足(13.75)式，则从 c 点右传的亦为弹塑性双波结构，见图 13.30(a)所示。弹塑性波在 b_1 点和 c_1 点作用的结果仍须按在 b 点和

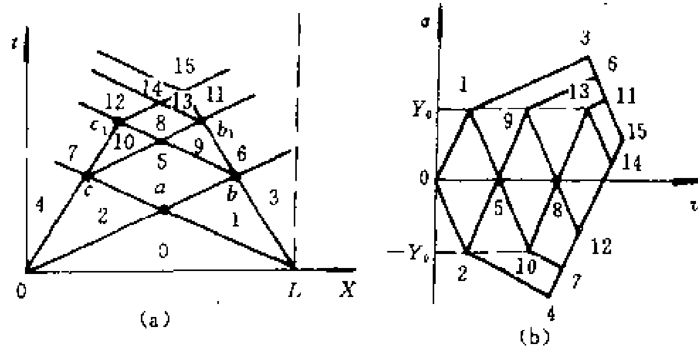


图 13.30

c 点那样讨论，以此类推。图 13.30(b)为图 13.30(a)所示各区状态的图解。

2. *对弱间断弹塑性波*

与上不同的是线性硬化杆换成递减硬化杆，在图 13.31(a)所示的载荷作用下，从杆的两端产生了以弹性强间断波 La 和 Oa 开头的塑性中心简单波区 1 和 2，1 区为拉伸波；2 区为压缩波。

沿强间断波 La 之后侧的状态以 e 为标记，其状态

$$\sigma_e = Y_0, \ v_e = v_Y$$

沿强间断波 Oa 之后侧的状态以 f 为标记，其状态

$$\sigma_f = -Y_0, \ v_f = v_Y$$

这两个异号弹性强波在 a 点相遇，作用之后传出的当然为两个弹性强间断波(卸载波)ab 和 ac，在两波作用点 a 处的状态为

$$\sigma_a = 0 \ , \ v_a = 2v_Y$$

假定弹性卸载波 ab 可完全穿过塑性波区 1，ac 可完全穿过塑性波区 2，则形成如图 13.31(a)所示的状况。3 区和 4 区为恒值区，其状态分别以下标 g 和 k 标记，即有

$$\sigma_g = \sigma_3 \quad , \quad v_g = v_3 \quad , \quad \int_0^{\sigma_g} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho_0 C} = \int_0^{Y_0} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho_0 C} + \int_{Y_0}^{\sigma_g} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho_0 C} = v_3$$

$$\sigma_k = \sigma_4 \quad , \quad v_k = v_4 \quad , \quad \int_0^{\sigma_k} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho_0 C} = \int_0^{-Y_0} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho_0 C_0} + \int_{-Y_0}^{\sigma_k} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\rho_0 C} = - v_4$$

至于其他各区的状态同样可求，这里从略，可参见图 13.31(b)的图解。

13.11 杆中弹塑性波的追赶卸载

上节研究的是弹塑性波的迎面相互作用，本节探讨同向传播的弹塑性波的相互作用。

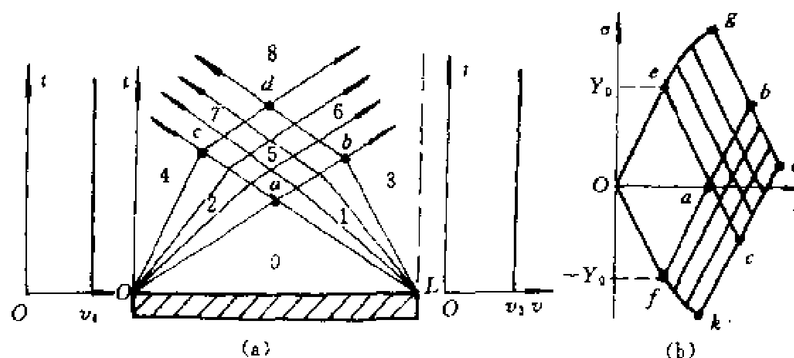


图 13.31

为了简单，以下只研究线性硬化杆中强间断卸载扰动的追赶卸载。

设一原处于静止自然态、均匀截面、半无限长的线性硬化杆，其左端作用着一个矩形脉冲，见图 13.32(a)，压力载荷 $|\sigma_*|>Y_0$，于是在 $t=0$ 时刻从杆的左端发出强间断弹塑性双波，其 1 区和 2 区的状态：

$$\begin{aligned}&\sigma_1=-Y_0,\quad v_1=v_Y,\quad \varepsilon_1=-\varepsilon_Y=-Y_0/E\\&\sigma_2=\sigma_*,\quad v_2=\left(\frac{1}{\rho_0C_0}-\frac{1}{\rho_0C_1}\right)Y_0-\frac{\sigma_*}{\rho_0C_1}=v_*\end{aligned}\tag{13.76}$$

由(13.70)式可以求得 2 区中的应变 ε_2：

$$\varepsilon_2=\sigma_*/E_1+(1/E_1-1/E)Y_0=\varepsilon_*\tag{13.77}$$

在 $t=t_1$ 时刻，应力 σ_* 突然卸载为零，于是从 t_1 发出一个右行强间断卸载波，形成区域 3，在该区中

$$\bar{\sigma}_3=0,\quad \bar{v}_3=v_2+\frac{\sigma_2}{\rho_0C_0}=v_*+\frac{\sigma_*}{\rho_0C_0}=\bar{v}_*$$

据(13.64)式：

$$\bar{\sigma}=\sigma_m+E(\bar{\varepsilon}-\varepsilon_m)$$

而 $\bar{\sigma}=\bar{\sigma}_3=0$，$\sigma_m=\sigma_*$，$\varepsilon_m=\varepsilon_*$，从而求得 $\bar{\varepsilon}_3$

$$\bar{\varepsilon}_3=\varepsilon_*-\sigma_*/E=(1/E_1-1/E)(\sigma_*+Y_0)=\bar{\varepsilon}_*\tag{13.78}$$

在 $t=t_a=t_1/(1-C_1/C_0)$ 时，强卸载波 t_1a 追上塑性加载波 oa，两波作用之后从图 13.32(a)所示的 a 点反射回来的一定为弹性波，从 a 点向右传的波则有两种可能：或继续保持为塑性波，或塑性波消灭转变为弹性波，到底为何波？这取决于端加载荷，按上节对图 13.30(a)所示的 b 点和 c 点的判断方法，可以推出：

(1) 当 $\bar{v}_*<2v_Y$，即 $|\sigma_*|<\dfrac{C_0+C_1}{C_0-C_1}Y_0$ 时，右传弹性波；

(2) 当 $\bar{v}_*>2v_Y$，即 $|\sigma_*|>\dfrac{C_0+C_1}{C_0-C_1}Y_0$ 时，塑性波依存。

现设 $\bar{v}_*>2v_Y$，则塑性波在 a 点依然保存，但在该 a 点即在杆的 $X=L_1$ 截面出现一个**驻定的应变间断面**(stationary discontinuity surface of strain)，即从 $t>t_a$ 开始在 $X=L_1$ 的两边应变发生间断。对于图 13.32(a)中的区域 4 分成 4′和 4″，则有

$$\begin{cases}\sigma'_4-\sigma_1=-\rho_0C_1(v'_4-v_1),\quad \bar{\sigma}''_4-\bar{\sigma}_3=\rho_0C_0(\bar{v}''_4-\bar{v}_3)\\ \sigma'_4=\bar{\sigma}''_4=\sigma_4,\quad v'_4=\bar{v}''_4=v_4\end{cases}$$

由上式推出

$$\begin{cases} v_4 = \dfrac{C_1 - C_0}{\rho_0 C_1}\left(\dfrac{\sigma_*}{C_0 + C_1} + \dfrac{Y_0}{C_0}\right) \\ \sigma_4 = \dfrac{C_0 - C_1}{C_0 + C_1}\sigma_* = \dfrac{C_0 - C_1}{C_0 + C_1}\sigma_2 = \dfrac{1}{\beta}\sigma_2 \end{cases} \tag{13.79}$$

其中

$$\beta = \frac{C_0 + C_1}{C_0 - C_1} \tag{13.80}$$

因 4′ 区为塑性加载区，据(13.70)式，则有：

$$\sigma'_4 = -Y_0 + E_1(\varepsilon'_4 + \varepsilon_Y)，而\ \sigma'_4 = \sigma_4,\quad \varepsilon_Y = Y_0/E$$

从而得到

$$\varepsilon'_4 = \frac{\sigma_4}{E_1} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E}\right)Y_0 \tag{13.81}$$

因 4″ 区仍为弹性卸载区，据(13.64)式，则有

$$\bar{\sigma}''_4 = \sigma_m + E(\bar{\varepsilon}''_4 - \varepsilon_m)$$

而在 3 区有：

$$\bar{\sigma}_3 = \sigma_m + E(\bar{\varepsilon}_3 - \varepsilon_m)$$

故推得

$$\bar{\sigma}''_4 - \sigma_3 = E(\bar{\varepsilon}''_4 - \bar{\varepsilon}_3)$$

从而求得

$$\bar{\varepsilon}''_4 = \frac{\sigma_4}{E} + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E}\right)(\sigma_* + Y_0) \tag{13.82}$$

由(13.81)式和(13.82)式看出

$$\varepsilon'_4 \neq \bar{\varepsilon}''_4 \tag{13.83}$$

即沿(X,t)平面上的 $X=L_1$ 线应变从 t_a 开始发生间断。

从 a 点发出的左传弹性波到达杆的左端后，又完全卸载成右传卸载波，它在 $t=t_b$ 时在 b 点追上了塑性加载波。于是在 b 点又要重复在 a 点的那样讨论：判断塑性波是否消亡。如果在 b 点塑性波依然存在，由该点发出的左传弹性波在杆左端又卸载成右传弹性波，在 $t=t_c$ 时于 c 点追上塑性波，在此又要讨论塑性波是否消亡。如此循环。现假定塑性波从此消失，则由该点发出右传弹性波。整个波的传播与反射，见图 13.32(a)所示，在从 t_4 点出发的右传弹性卸载波扫过之后杆的运动学和动力学过程结束，至于区域 5、6、7、8、9 的状态完全可像 1、2、3、4 区那样求得，这里从略，可见图 13.32(c)的图解。

在塑性加载波被来自杆左端的那些弹性卸载波追赶上的点上，要形成驻定的应变间断，于是同一个应力、速度区域其应变却分区不同，如应力、速度均布的区域 6 却分成三个不同的应变分区：6′、6″、6‴。关于同一个应力、速度区域中的各分区的应变，可参见图 13.32(d)的图解。

杆被塑性加载过的各区段分别为区间：$[0,L_1]$、$[L_1、L_2]$和$[L_2、L_3]$，在这些区间曾达到的最大应力 σ_m 和应变 ε_m 分别为

$$\begin{cases} \sigma_m = \sigma_* = \sigma_2 \\ \varepsilon_m = \varepsilon_* = \varepsilon_2 \end{cases},\quad \begin{cases} \sigma_m = \sigma_4 \\ \varepsilon_m = \varepsilon_4 \end{cases},\quad \begin{cases} \sigma_m = \sigma_6 \\ \varepsilon_m = \varepsilon_6 \end{cases} \tag{13.84}$$

通过较复杂的运算，可以推出

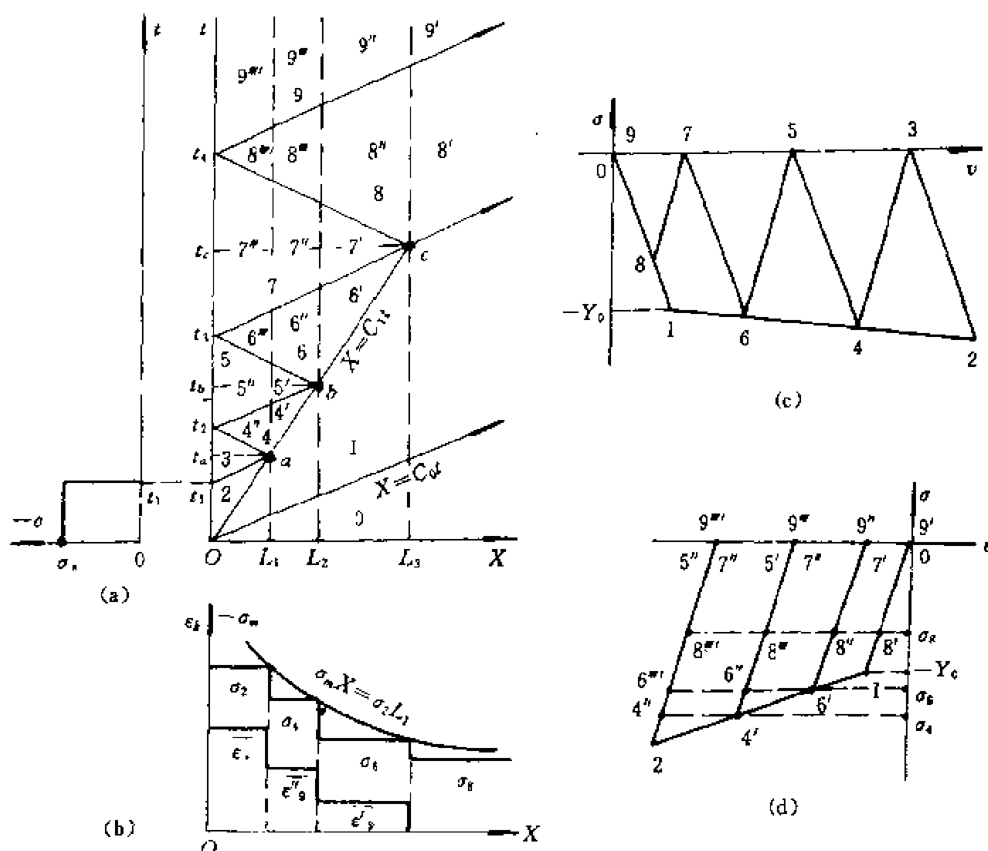


图 13.32

$$\sigma_4 = \frac{1}{\beta}\sigma_2, \ \sigma_6 = \frac{1}{\beta}\sigma_4$$

如果塑性波在 c 点依存，则区域 $8'$ 亦成为塑性加载区，同样可以推出：$\sigma_8 = \frac{1}{\beta}\sigma_6$，以此类推。总之有

$$\sigma_{2(n+1)} = \frac{1}{\beta}\sigma_{2n}, \quad n = 1,2,\cdots \tag{13.85}$$

根据图 13.32(a)中各个波的几何关系，可以求出

$$L_2 = \beta L_1, \ L_3 = \beta L_2, \ \cdots, \ L_{n+1} = \beta L_n \tag{13.86}$$

由(13.85)式和(13.86)式推出

$$\sigma_{2(n+1)} L_{n+1} = \cdots = \sigma_6 L_3 = \sigma_4 L_2 = \sigma_2 L_1 \tag{13.87}$$

如果作一条双曲线

$$\sigma_m X = \sigma_2 L_1 \tag{13.88}$$

则区域 2、4、6、…的应力 σ_m 均落在这条曲线上，见图 13.32(b)所示。

现在所研究的线性硬化杆在 9 区完全卸载，即 $\bar{\sigma}_9 = \bar{v}_9 = 0$，但留有残余应变 ε_R. 对于线性硬化杆的残余应变由(13.64)和 13.84)式可给出

$$\varepsilon_R = \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E}\right)(\sigma_m + Y_0) \tag{13.89}$$

在杆的$[0,L_1]$、$[L_1、L_2]$、$[L_2,L_3]$、$[L_3,\infty]$的残余应变分别为

$$
\begin{cases}
\varepsilon_R = \bar{\varepsilon}_9^{\prime\prime\prime\prime} = \bar{\varepsilon}_* = \left(\dfrac{1}{E_1} - \dfrac{1}{E}\right)(\sigma_2 + Y_0) = \left(\dfrac{1}{E_1} - \dfrac{1}{E}\right)(\sigma_* + Y_0) \\
\varepsilon_R = \bar{\varepsilon}^{\prime\prime\prime}{}_9 = \left(\dfrac{1}{E_1} - \dfrac{1}{E}\right)(\sigma_4 + Y_0) \\
\varepsilon_R = \bar{\varepsilon}^{\prime\prime}{}_9 = \left(\dfrac{1}{E_1} - \dfrac{1}{E}\right)(\sigma_6 + Y_0) \\
\varepsilon_R = \bar{\varepsilon}_9^{\prime} = 0
\end{cases}
\tag{13.90}
$$

杆的这些残余应变已表示在图 13.32(b)中。式(11.90)和图 13.32(b)可以粗略地解释被锤子多次打击的钎子端所出现的蘑菇顶现象,见图 13.3。

13.12 几点重要内容的概述

以上所述的内容为爆炸与冲击领域,例如爆炸压接导线和爆炸加工等实践中必备的应力波基础——一维应力应力波理论。然而应力波的内容浩瀚,现限于篇幅只论至此。以下概述应力波余下内容中的几个重要之点。

13.12.1 关于一维应变

一维应变连续波的控制方程组与一维应力连续波的控制方程组完全相同,即

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_X}{\partial X} = \dfrac{\partial \varepsilon_X}{\partial t} \\
\rho_0 \dfrac{\partial v_X}{\partial t} = \dfrac{\partial \sigma_X}{\partial X} \\
\sigma_X = \sigma_X(\varepsilon_X)
\end{cases}
\tag{13.91}
$$

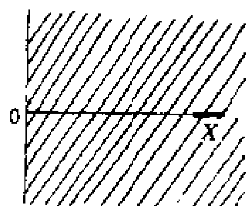


图 13.33

其中 v_X、ε_X、σ_X 为质点运动方向(即图 13.33 所示的 X 方向)的速度、应变、应力。其方程组的特征线及其相容关系式的形式同一维应力的式(13.18)或(13.19)或(13.20),即为

$$\mathrm{d}X = \pm C_L \mathrm{d}t \tag{13.92}$$

$$\mathrm{d}v_X = \pm C_L \mathrm{d}\varepsilon_X \tag{13.93}$$

或

$$\mathrm{d}\sigma_X = \pm \rho_0 C_L \mathrm{d}v_X \tag{13.94}$$

其中 C_L 亦同一维应力波速 C 的定义(见(13.12)式),即

$$C_L = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\sigma_X}{\mathrm{d}\varepsilon_X}} \tag{13.95}$$

一维应变的强间断波阵面上的守恒条件全同一维应力的式(13.49),即

$$
\begin{cases}
[v_X] = \mp \mathscr{D}[\varepsilon_X] \\
[\sigma_X] = \mp \rho_0 \mathscr{D}[v_X] \\
\rho_0[e] = \dfrac{1}{2}(\sigma_X^- + \sigma_X^+)[\varepsilon_X]
\end{cases}
\tag{13.96}
$$

其中波速 $\mathscr{D}$ 的定义同(13.48)式,即

$$\mathscr{D}=\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{[\sigma_X]}{[\varepsilon_X]}} \tag{13.97}$$

由以上论述看出，一维应力的许多讨论可以照搬到一维应变的情况。一维应变与一维应力所不同的是：

1. 应力应变的维数不同

①对于一维应力，其应力是一维的（即只在一个方向有应力），而应变是三维的，即应力张量 $\mathbf{\Sigma}$ 和应变张量 $\mathbf{E}$ 为

$$\mathbf{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_X & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}\varepsilon_X & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_Y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_Z\end{bmatrix} \tag{13.98}$$

对于弹性变形而言

$$\varepsilon_Y=\varepsilon_Z=-\nu\varepsilon_X,\quad \nu\text{—— 泊松比} \tag{13.99}$$

②对于一维应变，其应力是三维的，而应变是一维的（即只有一个方向存在应变），即应力张量 $\mathbf{\Sigma}$ 和应变张量 $\mathbf{E}$ 为

$$\mathbf{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_X & 0 & 0\\ 0 & \sigma_Y & 0\\ 0 & 0 & \sigma_Z\end{bmatrix},\quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}\varepsilon_X & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{13.100}$$

对于弹性变形而言

$$\sigma_Y=\sigma_Z=\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_X \tag{13.101}$$

2. 本构关系与屈服条件的具体形式不同

不管是一维应力还是一维应变，在弹性加载时，它们都遵循广义胡克定律，见(12.168)式；在塑性加载时，它们都满足密赛斯屈服条件和屈斯卡屈服条件，见(12.200)式和(12.196)式。然而，它们的具体形式不同。

①对于一维应力

$$\sigma_X=E\varepsilon_X,\quad |\sigma_X|\leqslant Y_0\text{(弹性变形)} \tag{13.102}$$

$$\sigma_X=Y,\quad |\sigma_X|>Y_0\text{(塑性加载)} \tag{13.103}$$

其中 E 为杨氏模量，Y_0 为弹性极限即初始屈服应力，而屈服应力 Y 为塑性应变 ε_X^P 或塑性应变能 W_P 的函数，即

$$Y=Y(\varepsilon_X^P)=Y_P,\quad \text{或 } Y=Y(W_P)=Y_W \tag{13.104}$$

波速

$$C=\sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\sigma_X}{\mathrm{d}\varepsilon_X}}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{E}{\rho_0}}=C_0, & |\sigma_X|\leqslant Y_0\text{(弹性变形)}\\[2ex] \sqrt{\dfrac{E_P}{\rho_0}}, & |\sigma_X|>Y_0\text{(塑性加载)}\end{cases} \tag{13.105}$$

其中塑性硬化模量 E_P 为

$$E_P=\frac{EY'_P}{E+Y'_P}=\frac{EY_WY'_W}{E+Y_WY'_W},\quad Y'_P=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\varepsilon_X^P},\quad Y'_W=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}W_P} \tag{13.106}$$

弹性卸载规律：

$$\bar{\sigma}_X = \sigma_{Xm} + E(\bar{\varepsilon}_X - \varepsilon_{Xm}) \tag{13.107}$$

其中

$$\sigma_{Xm} = \sigma_{Xm}(X), \quad \varepsilon_{Xm} = \varepsilon_{Xm}(X) \tag{13.108}$$

②对于一维应变

$$\sigma_X = E_L \varepsilon_X, \quad |\sigma_X| \leqslant Y_H (\text{弹性变形}) \tag{13.109}$$

$$\sigma_X - \sigma_Y = \pm Y, \quad |\sigma_X| > Y_H (\text{塑性加载}) \tag{13.110}$$

其中侧限弹性模量 E_L 和侧限屈服极限 Y_H 分别为

$$E_L = \lambda + 2\mu = K + \frac{4}{3}G = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{13.111}$$

$$Y_H = \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} Y_0 = \frac{K + \frac{4}{3}G}{2G} Y_0 = \frac{1-\nu}{1-2\nu} Y_0 \tag{13.112}$$

其中拉梅系数 λ 和 μ，以及体积模量 K 与剪切模量 G、杨氏模量 E 和泊松比 ν 之间的关系为(见(12.172)、(12.173)和(12.175)式)：

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{13.113}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{13.114}$$

$$K = \lambda + \frac{2G}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{13.115}$$

波速：

$$C_L = \sqrt{\frac{1}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\sigma_X}{\mathrm{d}\varepsilon_X}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{K + \frac{4}{3}G}{\rho_0}} = \sqrt{\dfrac{E_L}{\rho_0}}, & |\sigma_X| \leqslant Y_H (\text{弹性变形}) \\ \sqrt{\dfrac{K + \frac{4}{3}G_P}{\rho_0}}, & |\sigma_X| > Y_H (\text{塑性加载}) \end{cases} \tag{13.116}$$

其中塑性剪切刚度 G_P 为

$$G_P = \frac{GY'_P}{3G + Y'_P} = \frac{GY_W Y'_W}{3G + Y_W Y'_W} \tag{13.117}$$

弹性卸载规律：

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_X = \sigma_{Xm} + E_L(\bar{\varepsilon}_X - \varepsilon_{Xm}) \\ \bar{\sigma}_Y = \sigma_{Ym} + \dfrac{\nu}{1-\nu}(\bar{\sigma}_X - \sigma_{Xm}), \quad \sigma_{ym} = \sigma_{ym}(X) \end{cases} \tag{13.118}$$

13.12.2 关于非一维空间的弹性波

为了广泛深入了解应力波的多样性以及应力波反射与透射的复杂性，现简介非一维空间中的弹性波以及弹性波在界面上的反射和透射情况。

1. 无限介质中的弹性波

设介质是三维无限(没边界)、均匀各向同性和线弹性的介质。在这种物质空间波的控制方程组为(在直角坐标系中)：

$$
\begin{cases}
\rho_0 \dfrac{\partial v_i}{\partial t} = \dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} = \sigma_{ij,j} \\
\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\
\varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\
v_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial t}
\end{cases}
\tag{13.119}
$$

式中的应力张量，若视作皮欧勒一基尔霍夫应力张量，则运动方程就是精确的，见(13.127)式。若视作一般张量，则运动方程就有一定的近似。在这里是按一般的应力张量处理的。

位移 u_i 可以分解成：产生膨胀（或压缩）的位移 $(u_p)_i$ 和产生剪切（畸变）的位移 $(u_t)_i$ 两部分，即

$$
u_i = (u_p)_i + (u_t)_i \tag{13.120}
$$

通过对线性方程(13.119)和(13.120)的一番运算后，可以推出膨胀位移扰动的传播为纵波，即为无旋波，亦称作 P 波(primary wave)，该弹性波的传播速度为

$$
C_L = \sqrt{E_L/\rho_0} \tag{13.121}
$$

推出剪切位移扰动的传播为横波，即为等容波，亦称 S 波(secondary wave)，该弹性波速为

$$
C_T = \sqrt{G/\rho_0} \tag{13.122}
$$

即在线弹、均匀、各向同性的无限介质中位移扰动一般分解成两个独立的波传播，即以 C_L 速传播的无旋波和以 C_T 速传播的等容波($C_T<C_L$)。这与一维情况不同，在一维线弹介质中只有纵波。

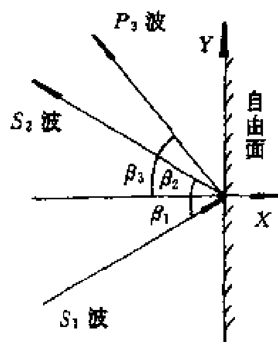


图 13.34

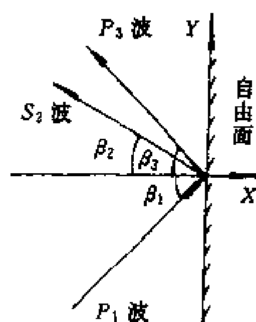


图 13.35

2. 斜入射到界面的波的反射和透射问题

对于一维情况，波都是垂直地入射到界面上，没有斜入射的问题。垂直入射的纵波反射和透射后亦为垂直界面的纵波。在非一维问题中，对于垂直入射到界面的一种波反射和透射后亦为同种波。然而对于斜入射到界面上的波则情况复杂，现以斜入射到半无限介质表面的弹性波为例说明：

①斜入射到自由面上的一个弹性波反射成两个弹性波，见图 13.34 和图 13.35 所示。

根据以上的方程可以推导出入射波、反射波和透射波间满足在光学中的史涅尔定律

(Snell's law)，对于图 13.34 所示的情况，则有

$$\frac{C_L}{\sin\beta_1}=\frac{C_T}{\sin\beta_2}=\frac{C_L}{\sin\beta_3},\quad 即有\ \beta_1=\beta_3 \tag{13.123}$$

对于图 13.35 所示的情况，则有

$$\frac{C_T}{\sin\beta_1}=\frac{C_T}{\sin\beta_2}=\frac{C_L}{\sin\beta_3},\quad 即有\ \beta_1=\beta_2 \tag{13.124}$$

②一个斜入射到两种介质分界面上的弹性波反射成两个弹性波、透射成两个弹性波，见图 13.36 和图 13.37 所示。

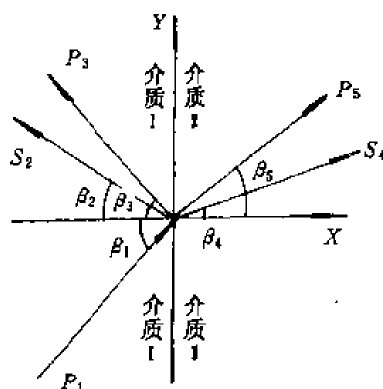


图 13.36

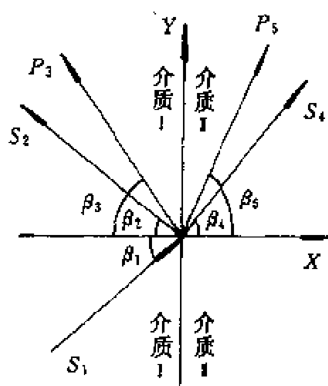


图 13.37

对于图 13.36 所示的情况则有

$$\frac{(C_L)_Ⅰ}{\sin\beta_1}=\frac{(C_T)_Ⅰ}{\sin\beta_2}=\frac{(C_L)_Ⅰ}{\sin\beta_3}=\frac{(C_T)_Ⅱ}{\sin\beta_4}=\frac{(C_L)_Ⅱ}{\sin\beta_5} \tag{13.125}$$

对于图 13.37 所示的情况则有

$$\frac{(C_T)_Ⅰ}{\sin\beta_1}=\frac{(C_T)_Ⅰ}{\sin\beta_2}=\frac{(C_L)_Ⅰ}{\sin\beta_3}=\frac{(C_T)_Ⅱ}{\sin\beta_4}=\frac{(C_L)_Ⅱ}{\sin\beta_5} \tag{13.126}$$

如上论述了应力波理论中的某些重要之点。有关应力波理论的著作，中外文书籍较多，其中比较完善的基础理论作品应属五孔立编著的《应力波基础》[1]。本章所述的内容主要参考该书。

附表 13.1　压力或应力单位换算表

	帕 (Pa)	达因/厘米² (dyne/cm²)	巴 (bar)	标准大气压 (atm)	千克力/毫米² (kgf/mm²)	千磅力/英寸² (ksi)
1Pa=	1	10	10^{-5}	9.8692×10^{-6}	1.0197×10^{-7}	1.4504×10^{-7}
1dyne/cm²=	10^{-1}	1	10^{-6}	9.8692×10^{-7}	1.0197×10^{-8}	1.4504×10^{-8}
1bar=	10^{5}	10^{6}	1	0.98692	1.0197×10^{-2}	1.4504×10^{-2}
1atm=	1.0133×10^{5}	1.0133×10^{6}	1.0133	1	1.0332×10^{-2}	1.4696×10^{-2}
1kgf/mm²=	9.8067×10^{6}	9.8067×10^{7}	98.067	96.784	1	1.4223
1ksi=	6.8947×10^{6}	6.8947×10^{7}	68.947	68.046	0.70307	1

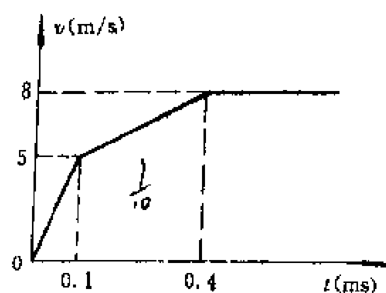
习题

13.1　在波阵面上的守恒条件中引用了麦克斯韦定理(Maxwell's theorem)，在证明该定理时用到了：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\Psi]=\left[\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\right]$$

试证明如上等式成立。

13.2　一线弹性材料半无限长杆 $X\geqslant0$，其屈服极限 $Y=5000\mathrm{kgf/cm^2}$，杨氏模量 $E=2\times10^6\mathrm{kgf/cm^2}$，密度 $\rho_0=8\mathrm{g/cm^3}$，初始时刻杆处于自然、静止状态。杆左端 $X=0$ 处施加一渐加载荷如下面的图所示。



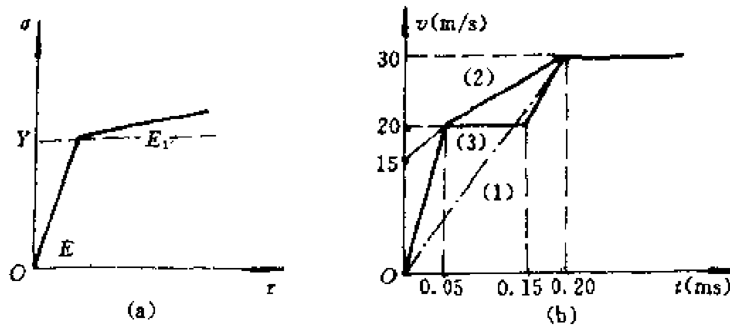
题图 13.2

(1) 画出 $X-t$ 图，$v-\varepsilon$ 图以及 $\sigma-v$ 图。

(2) 画出 $t=0.2$、0.4、0.6ms 时刻的波形曲线。

(3) 分别画出 $X=1$、2、3m 处的时程曲线。

13.3　一线性硬化材料半无限长杆 $X\geqslant0$，应力应变关系如下图之(a)所示，其中 $E=2\times10^6\text{kgf/cm}^2$、$E_1=E/25$、$Y=4000\text{kgf/cm}^2$、$\rho_0=8\text{g/cm}^3$。在杆左端 $X=0$ 处施加如下图之(b)所示三种形式的载荷。



题图 13.3

(1) 画出 $X-t$ 图，$v-\varepsilon$ 图以及 $\sigma-v$ 图。

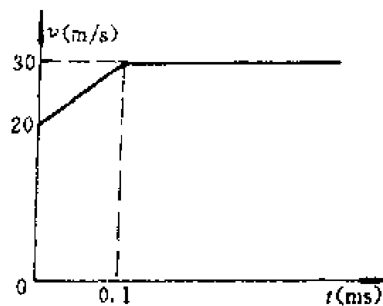
(2) 画出 $t=0.2$、0.4、0.6ms 时刻的波形曲线。

(3) 画出 $X=0.5$、1.0m 位置的时程曲线。

13.4　一递减硬化材料半无限长杆 $X\geqslant0$ 其应力应变关系为：

$$\varepsilon=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{E} & \text{当 } |\sigma|<Y \text{ 时}\\ \dfrac{\sigma_Y}{E}\pm\left(\dfrac{\sigma-\sigma_Y}{A}\right)^2 & \text{当 } |\sigma|>Y \text{ 时}\end{cases}$$

式中 $E=2\times10^6\text{kgf/cm}^2$，$Y=4000\text{kgf/cm}^2$（其中拉为正、压为负），$A=10^7\text{kgf/cm}^2$。在杆左端 $X=0$ 处施加一载荷，如下图所示。



题图 13.4

(1) 画出 $X-t$ 图，$v-\varepsilon$ 图以及 $\sigma-v$ 图。

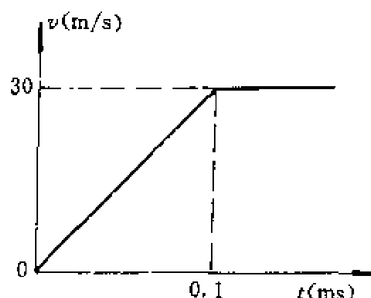
(2) 画出 $t=0.2$、0.4、0.6ms 时刻的波形曲线。

(3) 画出 $X=1$、2、3m 位置上的时程曲线。

13.5　一递增硬化材料半无限长杆 $X\geqslant0$，其应力应变关系为：

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{当 } |\sigma| \leqslant Y \text{ 时} \\ \sigma_Y + A\left(\varepsilon - \dfrac{\sigma_Y}{E}\right)^2 & \text{当 } |\sigma| > Y \text{ 时} \end{cases}$$

式中 $E=2\times10^6\text{kgf/cm}^2$、$Y=4000\text{kgf/cm}^2$、$A=\pm10^7\text{kgf/cm}^2$（其中拉为正，压为负）。在杆左端 $X=0$ 处施加一载荷，如图所示。



题图 13.5

(1) 画出 $X-t$ 图，$v-\varepsilon$ 图以及 $\sigma-v$ 图。

(2) 画出 $t=0.2$、0.4、0.6ms 时刻的波形曲线。

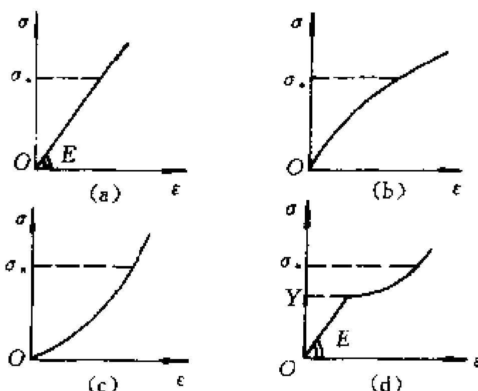
(3) 画出 $X=1$、2、3m 位置上的时程曲线。

13.6 证明在弱间断弹性简单波传播时，外力作功全部转化为质点动能和应变能，而且动能和应变能各占一半。

13.7 一半无限长杆 $X\geqslant0$，其杆端 $X=0$ 处施加一突加恒值应力载荷 σ_*，当其应力应变关系分别如图中所示四种情况时，试说明：

(1) 波速的解析表达式。

(2) 外力作功和内能、应变能、质点动能之间的关系（画图示意）。



题图 13.7

13.8 已知递增硬化材料的应力应变关系如图所示，表达式为：

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon < \varepsilon_Y \\ \sigma_Y + \dfrac{a(\varepsilon-\varepsilon_Y)}{\varepsilon_Y + b - \varepsilon} & \varepsilon \geqslant \varepsilon_Y \end{cases}$$

其中 $a=13500\text{kgf/cm}^2$，$b=0.9$，$Y=18000\text{kgf/cm}^2$，$E=1,285,700\text{kgf/cm}^2$，$\varepsilon_Y=0.014$，$\rho_0=8\text{g/cm}^3$. 现设半无限长杆的一端受如图之(b)和(c)所示之载荷。

(1) 求出冲击波开始形成的地点和时间，画出 $t=0.13\text{s}$ 之前的 $X-t$ 图及 $\sigma-\varepsilon$ 图。

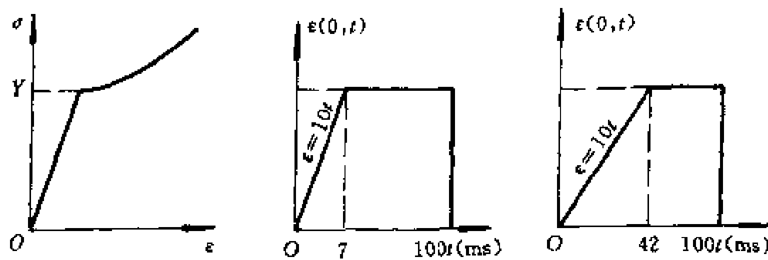
(2) 求出塑性冲击波消失的地点和应力；若不消失，求出强间断卸载扰动第一次追上塑性冲击波发生相互作用后的冲击波强度。

(3) 画出 $X=20\text{m}$ 以及 $X=40\text{m}$ 处的应力时程曲线。

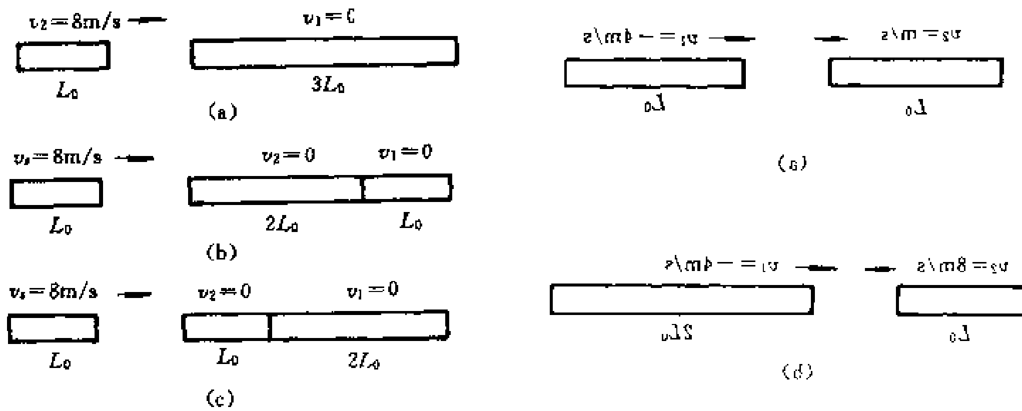
13.9 相同材料弹性杆的共轴撞击如图所示，作出 $X-t$ 图、$\sigma-v$ 图，并确定其撞击结束时间及两杆脱开时间。（注意，在两杆撞击界处只能受压，而不能承受拉应力。）

13.10 两相同材料弹性杆的共轴撞击如图所示。画出 $X-t$ 图和 $\sigma-v$ 图，确定两杆分离之后各自的整体飞行速度，并讨论与普通物理学中关于碰撞问题的处理结果有何异同。

13.11 已知两种材质的弹性杆 A 和 B 的杨氏模量、密度和屈服极限分别为：
$E_A=0.6\times10^6\text{kgf/cm}^2$，$\rho_A=2.4\text{g/cm}^3$，$Y_A=1000\text{kgf/cm}^2$，$E_B=1.8\times10^6\text{kgf/cm}^2$，$\rho_B=7.2\text{g/cm}^3$，$Y_B=$

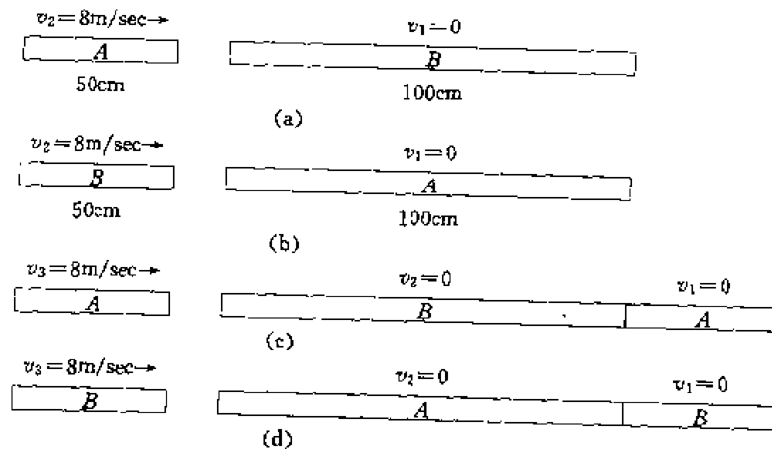


题图 13.8



题图 13.9　　　　图 13.10

2400kgf/cm²。试对图所示四种情况分别画出 $X-t$ 图和 $\sigma-v$ 图，并确定撞击结束时间、两杆脱开时间以及分离之后各自的整体飞行速度。



题图 13.11

13.12　两根材质相同的弹性杆用环氧树脂轴向粘接如图所示。假定环氧树脂层的厚度远小于杆中传播的应力脉冲长度和杆长，而其声抗为杆材声抗的 1/2，树脂的粘性暂时忽略不计(即按弹性材料考虑)。当强度为 σ_0 的应力波由 A 杆传入时，试说明透射到 B 杆中的透射波呈台阶状波形，并求其第二个台阶上应力值和第 n 个台阶上的应力值。

13.13　一线性硬化材料有限长杆的 ρ_0、C_0(弹性波速)、C_1(塑性波速)均为已知，其左端 $X=0$ 处施



题图 13.12

加如图所示载荷，图中 $v_0 > v_Y$(屈服速度)，另一端 $X=1$ 固定。试画出 $t=5l/C_1$ 之前的 $X-t$ 图和 $\sigma-v$ 图。

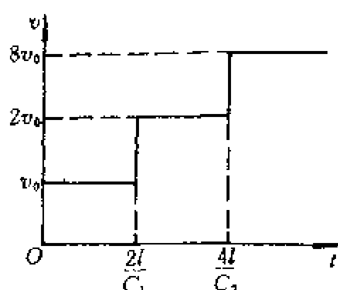
13.14　一有限长杆 $0 \leqslant X \leqslant 1$，其一端 $X=0$ 处施加一如图所示载荷(详见图)。试问下列三种情况下，在杆子另一端 $X=1$ 处应分别具有什么样的边界载荷条件(用作图法表示)才不会发生波的反射？

(1) $v_0 < v_Y$(屈服速度)，即杆处于弹性阶段。

(2) $v_0 = 2v_Y$，材料为线性硬化材料。

(3) $v_0 = 2v_Y$，材料为递减硬化材料。

假定杆材的弹性波速 C_0、塑性波速 C_1 或 $C(\varepsilon)$ 均为已知。



题图 13.13

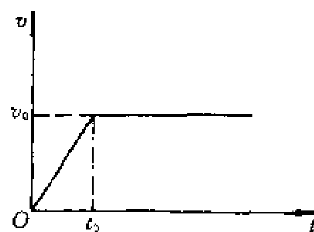


图 13.14

参考文献

[1]　王礼立. 应力波基础. 北京:国防工业出版社,1985

[2]　吕洪生. 爆炸压接导线损伤的应力波分析. 电力建设,1986

[3]　Rinehart J S. Stress Transients in Solids, Hyper Dyramics. New mexico,1975. 2
(中泽本:J. 莱茵哈特. 固体中的应力瞬变. 杨善元译. 北京:煤碳工业出版社,1981)